

Lokalne wyboczenie ścianki wspornikowej elementu cienkościennego przy wzdłużnej i poprzecznej zmienności naprężeń

Andrzej Szychowski

*Katedra Mechaniki, Konstrukcji Metalowych i Metod Komputerowych,
Wydział Budownictwa i Architektury, Politechnika Świętokrzyska, e-mail: aszychow@tu.kielce.pl*

Streszczenie: W pracy przedstawiono wyniki badań stateczności sprężystości zamocowanych ścianek (płyt) wspornikowych przy wzdłużnej i poprzecznej zmienności naprężeń. Przyjęto liniowy rozkład naprężeń w kierunku szerokości ścianki (płyty) oraz liniowy lub nieliniowy (wg paraboli 2. stopnia) rozkład naprężeń na jej długości. Wyznaczono wykresy współczynników wyboczeniowych (k) dla różnie podpartych i różnie obciążonych płyt wspornikowych, których nie znaleziono w literaturze.

Słowa kluczowe: pręty cienkościenne, przekrój otwarty, ścianki wspornikowe, sprężyste zamocowanie, wzdłużna i poprzeczna zmienność naprężeń

1. Wprowadzenie

Pręty cienkościenne o przekroju otwartym należą do grupy elementów, których nośność graniczna jest warunkowana zjawiskami lokalnymi zachodzącymi na długości segmentu pręta. Segment pręta cienkościennego zdefiniowano w [1] jako odcinek pręta pomiędzy usztywnieniami poprzecznymi (żebry, przeponami itp.) zapewniającymi sztywny kontur przekroju. W złożonych stanach obciążenia (np. przy dwukierunkowym zginaniu poprzecznym) w płaskich ściankach wspornikowych może występować wzdłużna (po długości segmentu) i poprzeczna (po szerokości ścianki) zmienność naprężeń normalnych. Ścianka wspornikowa jest na ogół sprężystości zamocowana w tzw. ścianie przęsłowej (np. w środniku), dla której obie krawędzie wzdłużne są podparte. Należy tutaj podkreślić, że pod względem stateczności lokalnej, ścianki wspornikowe charakteryzują się znacznie mniejszą odpornością na naprężenia ściskające w stosunku do ścianek przęsłowych. Takie ścianki można w praktyce traktować jak płyty wspornikowe (półki) sprężystości zamocowane w płytach przęsłowych (środnikach).

W przypadku ścianki wspornikowej, naprężenia krytyczne wyboczenia lokalnego zależą od jej smukłości, wzdłużnej i poprzecznej zmienności naprężeń oraz stopnia sprężystego zamocowania „na obrót” krawędzi podpartej.

W normie [2] do analizy wyboczenia lokalnego pręta cienkościennego zbudowanego z płaskich ścianek przyjęto model separacji ścianek (płyt składowych) swobodnie podpartych na wzdłużnych krawędziach łączenia płyt. W tym modelu obliczeniowym, o nośności krytycznej z warunku lokalnego wyboczenia decyduje najsłabsza ścianka. W rzeczywistości wyboczenie lokalne elementu cienkościennego występuje jednocześnie dla wszystkich ścianek, przy czym ścianka najsłabsza, np. wspornikowa jest sprężystości zamocowana „na obrót” w ścianie sąsiedniej (przęsłowej) co podnosi jej naprężenia krytyczne.

Lokalne wyboczenie elementu cienkościennego o przekroju otwartym można w praktyce analizować w oparciu o separację ścianek składowych z uwzględnieniem sprężystego

zamocowania „na obrót” płyty słabszej (usztywnianej) w płycie mocniejszej (usztywniającej). Poprawne wyznaczenie naprężeń krytycznych dla tak podpartych i obciążonych ścianek (płyt) składowych pręta cienkościennego służy do dokładniejszego szacowania nośności granicznej w oparciu o teorię szerokości efektywnej.

Statecznością płyt wspornikowych zajmowało się wielu autorów wymienionych w [3]. W tej znakomitej monografii podano m.in. wykresy i wzory aproksymacyjne płytowych współczynników wybozeniowych (k) dla osiowo ściskanych płyt wspornikowych, sprężyste zamocowanych na krawędzi podłużnej, przy stałej intensywności naprężeń na długości płyty. Korzystając z tych wzorów należy jednak pamiętać, że opisują one pierwszą półfalę wybożenia płyty. Dla dłuższych płyt (np. stanowiących ścianki składowe prętów cienkościennych) postać wybożenia charakteryzuje się wieloma półfalami tworzącymi się na ich długości. W celu wyznaczenia współczynników k z uwzględnieniem kolejnych półfal wybożenia należy wyznaczyć kolejne „gałęzie” wykresu np. wg procedury zamieszczonej w [4]. Jednak najczęściej stosowanym w praktyce sposobem jest przyjęcie $k = k_{min}$ dla pierwszej półfali wybożenia, co jednocześnie odpowiada wartości współczynnika dla nieskończonej długości płyty.

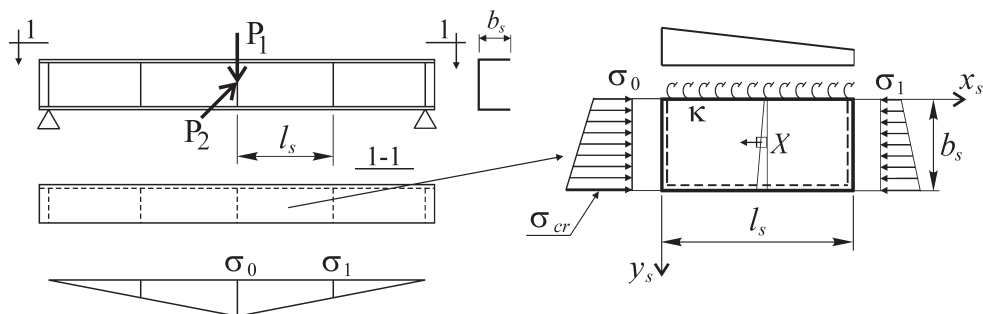
W pracach [5, 6] analizowano m.in. wpływ wzdłużnej zmienności naprężeń na stateczność i nośność graniczną osiowo ściskanych płyt wspornikowych dla granicznych warunków brzegowych (przegub, utwierdzenie) na krawędzi podpartej. Zaproponowano przybliżoną formułę obliczania płytowego współczynnika wybozeniowego (k).

W pracy [1] przedstawiono wyniki badań stateczności mimośrodowo ściskanych płyt wspornikowych przy wzdłużnej zmienności naprężeń dla granicznych przypadków podparcia krawędzi podłużnej (podparcie przegubowe lub pełne utwierdzenie). Wyprowadzono wzory na pracę sił zewnętrznych przy obciążeniu wywołującym wzdłużny rozkład naprężeń wg funkcji liniowej oraz wg paraboli 2. stopnia. Wyznaczono wykresy współczynników wybozeniowych (k) dla różnie obciążonych płyt wspornikowych. Z kolei w pracy [7] przedstawiono wyniki badań teoretycznych jednostronnie sprężyste zamocowanych i osiowo ściskanych płyt wspornikowych przy wzdłużnej zmienności naprężeń.

Do technicznego rozwiązania wielu zagadnień wybożenia lokalnego oraz nośności granicznej (szacowanej wg metody szerokości efektywnej) otwartych prętów cienkościennych w złożonych stanach naprężenia brakuje rozwiązań stanu krytycznego sprężyste zamocowanych płyt wspornikowych przy wzdłużnej i poprzecznej zmienności naprężeń.

2. Wybożenie lokalne płyty wspornikowej

Na rys. 1 pokazano przykładowy schemat statyczny elementu cienkościennego przy dwukierunkowym zginaniu poprzecznym. W takim przypadku naprężenia normalne zmieniają się na długości segmentu oraz na szerokości półki ściskanej.



Rys. 1. Wydzielona płyta wspornikowa przy wzdłużnej i poprzecznej zmienności naprężeń

2.1. Warunki brzegowe

Założono, że ściskana półka przekroju zachowuje się jak płyta wspornikowa, sprężysto zamocowana „na obrót” w środku (płyce przęsłowej). Druga, równoległa krawędź jest swobodna (nie podparta) i nie zawiera odgięcia usztywniającego. Poprzeczne krawędzie płyty na końcach segmentu przyjęto jako swobodnie podparte. Stopień sprężystego zamocowania „na obrót” podłużnej krawędzi płyty ($y_s = 0$) opisano za pomocą współczynnika ε wg [3] oraz wskaźnika κ wg [8] w następującej postaci:

$$\varepsilon = C_\theta \cdot b_s / D \quad (1)$$

$$\kappa = (1 + 2D / (b_s C_\theta))^{-1} \quad (2)$$

gdzie: C_θ – sztywność obrotowa krawędzi podpartej równa momentowi zginającemu powstałemu podczas obrotu o kąt jednostkowy, b – szerokość płyty, D – płytowa sztywność zginania.

Współczynnik ε wg wzoru (1) zmienia się od $\varepsilon = 0$ dla podparcia przegubowego do $\varepsilon = \infty$ dla pełnego utwierdzenia, natomiast wskaźnik κ wg wzoru (2), od $\kappa = 0$ (przegub) do $\kappa = 1$ (pełne utwierdzenie). Pomiędzy wskaźnikiem κ a współczynnikiem ε zachodzi następująca zależność [7]:

$$\kappa = \varepsilon / (2 + \varepsilon) \quad (3)$$

Przybliżone wzory do szacowania sztywności obrotowej C_θ krawędzi podłużnej półki ściskanej sprężysto zamocowanej „na obrót” w środku zginanego pręta cienkościennego o przekroju otwartym podano m.in. w pracach [9, 10]. Sztywność obrotową uzależniono od geometrii ścianki podpierającej (średnika) oraz jej stanu obciążenia. Przy korzystaniu z tych wzorów należy jednak pamiętać, że podczas analizy lokalnej utraty stateczności przekroju cienkościennego, za długość wyboczeniową (λ_d) należy podstawiać przewidywaną długość półfali wyboczenia lokalnego półki, a nie długość wyboczenia dystorsyjnego.

2.2. Funkcja ugięcia

Do aproksymacji postaci wyboczenia sprężysto zamocowanej płyty wspornikowej przy wzdłużnej i poprzecznej zmienności naprężeń przyjęto funkcję postaci (4):

$$w_s(x_s, y_s) = t_s \sum_{i=1}^{i_0} \left[f_{i2} \cdot \left((1 - \kappa) \frac{y_s}{b_s} + \kappa \left(\frac{y_s}{b_s} \right)^2 \right) + \sum_{p=3}^{p_0} f_{ip} \cdot \left(\frac{y_s}{b_s} \right)^p \right] \cdot \sin \left(\frac{i\pi x_s}{l_s} \right) \quad (4)$$

gdzie: t_s , l_s , b_s – grubość, długość, szerokość płyty (ścianki s), f_{ip} – bezwymiarowe, swobodne parametry funkcji ugięcia.

Funkcja ugięcia (4) spełnia warunki brzegowe na wzdłużnej krawędzi podpartej, natomiast warunki brzegowe na krawędzi swobodnej nie są spełnione tożsamościowo. W pracy [1] wykazano jednak, iż ze wzrostem stopnia p_0 wielomianu funkcji (4), moment zginający M_y oraz zastępcza siła Kirchhoffa Q_{ky} na swobodnej krawędzi płyty dążą do zera, minimalizując tym samym całkowitą energię potencjalną układu.

2.3. Stan naprężenia

W przypadku analizy stateczności płyty (ścianki) wspornikowej stanowiącej część składową pręta cienkościennego o przekroju otwartym, w której akceptuje się hipotezę

płaskich przekrojów lub hipotezę deplanacji przekroju (w zależności od stanu obciążenia pręta), rozkład naprężeń normalnych (rys. 1) można przedstawić w postaci:

$$\sigma_x = \sigma_o \left(1 - \alpha_s \frac{y_s}{b_s} \right) \left(1 - m \frac{x_s}{l_s} \right) \quad (5)$$

dla liniowego rozkładu naprężeń na długości płyty, oraz:

$$\sigma_x = \sigma_o \left(1 - \alpha_s \frac{y_s}{b_s} \right) \left(1 - m \frac{x_s^2}{l_s^2} \right) \quad (6)$$

dla nieliniowego rozkładu naprężeń na długości płyty, gdzie:

$$m = 1 - \sigma_1 / \sigma_o \quad (7)$$

Zmienność rozkładu naprężeń normalnych na długości płyty wspornikowej wg wzorów (5, 6) można uzyskać przez wprowadzenie naprężeń stycznych lub wzdłużnych sił masowych (rys. 1) o rozkładzie dobranym w zależności od sposobu obciążenia pręta cienkościennego. Sposób zastąpienia naprężeń stycznych odpowiednim rozkładem sił masowych w płytach wspornikowych opisano w pracy [1].

2.4. Naprężenia krytyczne

Naprężenia krytyczne (σ_{cr}) wyboczenia lokalnego płyty wspornikowej przy wzdłużnej i poprzecznej zmienności naprężeń odniesiono do najbardziej ściskanej krawędzi płyty (por.rys.1) i wyrażono w postaci klasycznego wzoru:

$$\sigma_{cr} = k \sigma_E \quad (8)$$

gdzie: σ_E – naprężenia Eulera dla płyty wg [3].

Płytowe współczynniki wyboczeniowe (k) do wzoru (8) wyznaczono metodą energetyczną. Całkowita energia potencjalna układu wynosi:

$$U_s = V_{s,1} + V_{s,2} - L_s \quad (9)$$

gdzie: $V_{s,1}$ – energia sprężysta zginania płyty, $V_{s,2}$ – energia sprężystego zamocowania krawędzi podłużnej ($y_s = 0$), L_s – praca sił zewnętrznych.

Z uwagi na fakt, że funkcję ugięcia płyty zapisano szeregiem sinusowo – wielomianowym postaci (4), energię sprężystą ($V_{s,1}$) wyznaczono w sposób zaproponowany w pracy [11], a funkcję pracy sił zewnętrznych (L_s) przy obciążeniu płyty wg rys. 1 wyznaczono z sekwencji wzorów wyprowadzonych w pracy [1]. Natomiast energię sprężystego zamocowania ($V_{s,2}$) krawędzi podłużnej wyznaczono ze wzoru (10) wg [3]:

$$V_{s,2} = \frac{C_\theta}{2} \int_0^{l_s} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y_s=0} \right]^2 dx \quad (10)$$

Płytowe naprężenia krytyczne obliczono z układu równań:

$$\partial U_s / \partial f_{ip} = 0 \quad (11)$$

sprowadzając zagadnienie do problemu wyznaczania wartości i wektorów własnych.

Do obliczenia współczynników (k) naprężeń krytycznych jednostronnie sprężyste zamocowanej płyty wspornikowej przy wzdłużnej i poprzecznej zmienności naprężeń

opracowano w środowisku pakietu *Mathematica*[®] [12] program obliczeniowy "Ncr_plyta_sw-spręż-(2).nb". Program umożliwia tablicowanie współczynników oraz graficzną prezentację wyników obliczeń (wykresy, postacie wyboczenia). Funkcję ugięcia płyty aproksymowano szeregiem (4), przy narzuceniu wartości początkowych wskaźnika utwierdzenia wg wzoru (2) od $\kappa = 0$ dla krawędzi podłużnej swobodnie podpartej do $\kappa = 1$ dla krawędzi utwierdzonej. Parametr i_0 określający ilość „półfal” funkcji sinus w kierunku osi x_s szeregu (4) dobierano w zależności od stosunku wymiarów płyty (l_s/b_s), rozkładu naprężeń działających w jej płaszczyźnie oraz wskaźnika κ . Na podstawie analizy zbieżności wyników (analogicznej do przedstawionej w pracy [1]), do obliczeń współczynników k jednostronnie sprężycie zamocowanych płyt przeszłowych o $l_s/b_s \leq 8$ oraz wartości parametrów: $0 \leq m \leq 1$ oraz $0 \leq \kappa \leq 1$ przyjęto w praktyce $i_0 = 10$ co daje wystarczającą dokładność z technicznego punktu widzenia przy jednoczesnej redukcji ilości obliczeń.

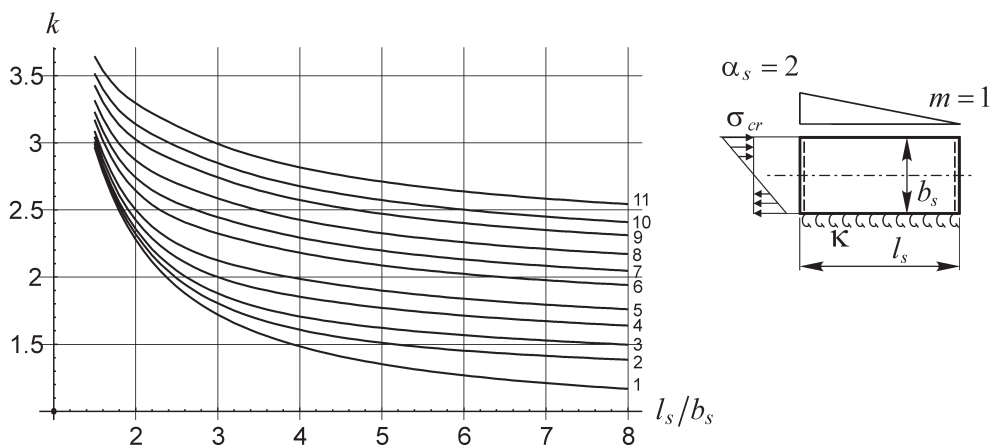
Prezentowane w dalszej części pracy wykresy współczynników k wyznaczono dla wartości parametrów $E = 205$ GPa oraz $\nu = 0,3$. W tabeli 1 podano przyporządkowanie numeru krzywej na poszczególnych wykresach (rys. 2–7) do współczynnika ε oraz wskaźnika κ wg wzorów (1, 2).

Tabela 1. Przyporządkowanie numeru krzywej na rys. 2–7 do współczynnika ε oraz wskaźnika κ .

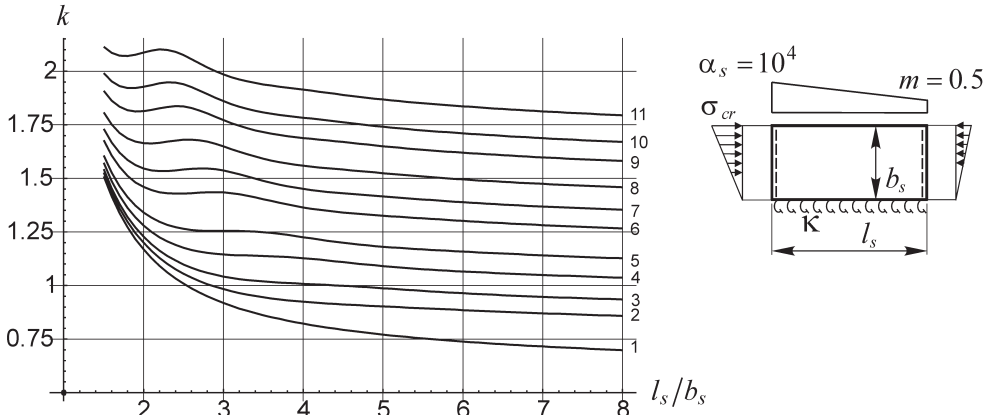
Nr krzywej	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
ε	0	0,15	0,3	0,6	1	2	3	5	10	20	10^4
κ	0	0,07	0,13	0,231	0,33	0,5	0,6	0,714	0,83	0,909	1

3. Wykresy płytowego współczynnika wyboczeniowego k

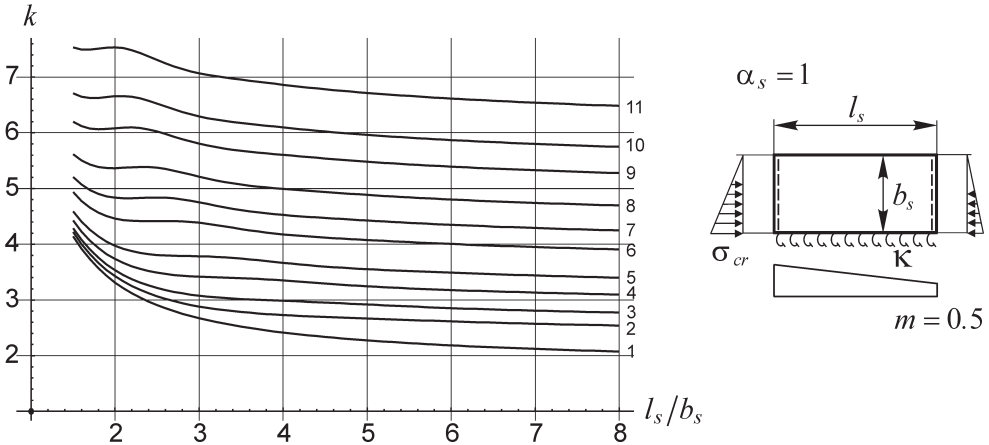
Na rys. 2 do rys. 7 pokazano wykresy współczynnika k dla wybranych (poprzecznych i podłużnych) rozkładów naprężeń w funkcji l_s/b_s oraz wskaźnika κ wg Tabeli 1. Rozkład naprężeń w płycie wspornikowej pokazano na schematach na każdym z wykresów.



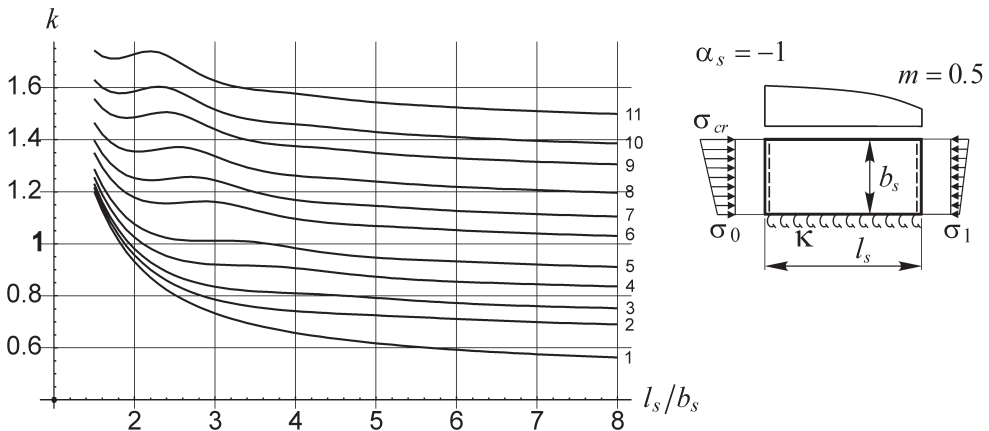
Rys. 2. Współczynnik k dla liniowego w kierunku poprzecznym ($\alpha_s = 2$) i liniowego w kierunku podłużnym ($m = 1$) rozkładu naprężeń w funkcji l_s/b_s oraz κ wg tab. 1.



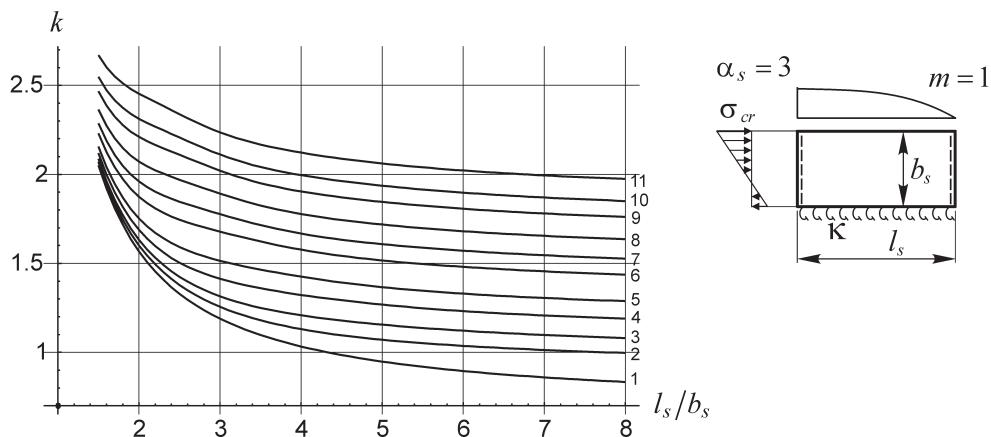
Rys. 3. Współczynnik k dla liniowego w kierunku poprzecznym ($\alpha_s = 10^4$) i liniowego w kierunku podłużnym ($m = 0,5$) rozkładu naprężeń w funkcji l_s/b_s oraz κ wg tab. 1.



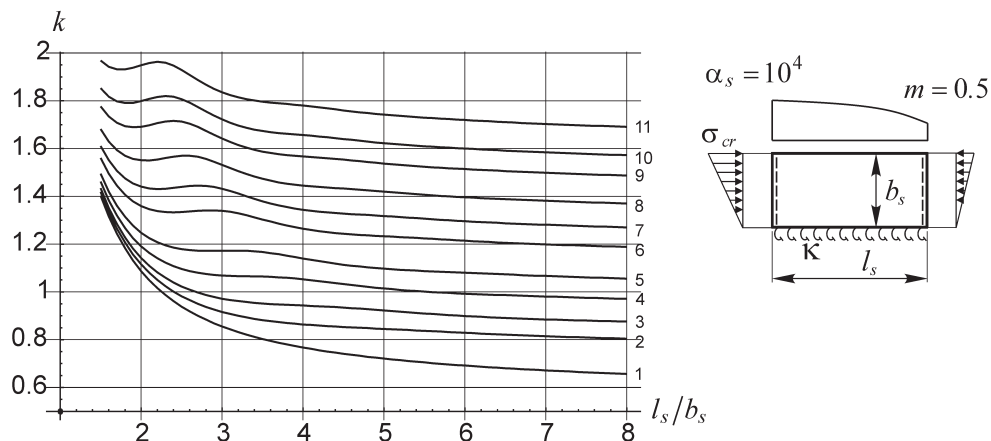
Rys. 4. Współczynnik k dla liniowego w kierunku poprzecznym ($\alpha_s = 1$) i liniowego w kierunku podłużnym ($m = 0,5$) rozkładu naprężeń w funkcji l_s/b_s oraz κ wg tab. 1



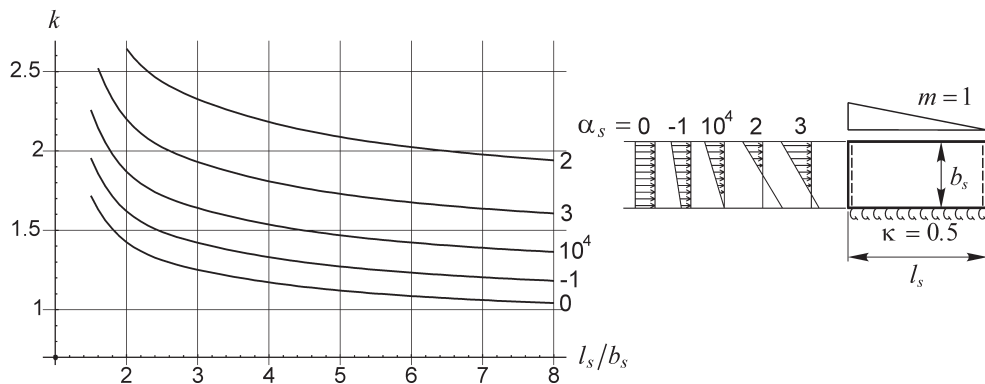
Rys. 5. Współczynnik k dla liniowego w kierunku poprzecznym ($\alpha_s = -1$) i nieliniowego w kierunku podłużnym ($m = 0,5$) rozkładu naprężeń w funkcji l_s/b_s oraz κ wg tab. 1



Rys. 6. Współczynnik k dla liniowego w kierunku poprzecznym ($\alpha_s = 3$) i nieliniowego w kierunku podłużnym ($m = 1$) rozkładu naprężeń w funkcji l_s/b_s oraz κ wg tab. 1



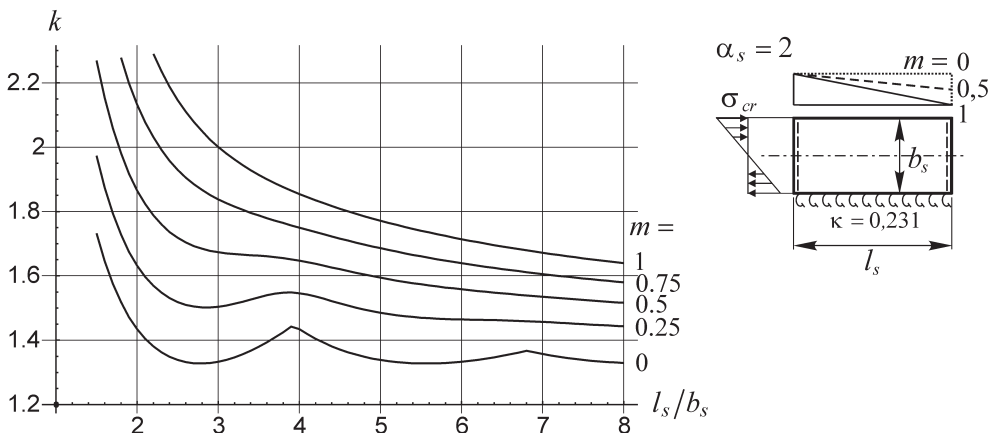
Rys. 7. Współczynnik k dla liniowego w kierunku poprzecznym ($\alpha_s = 10^4$) i nieliniowego w kierunku podłużnym ($m = 0,5$) rozkładu naprężeń w funkcji l_s/b_s oraz κ wg tab. 1



Rys. 8. Współczynnik k dla liniowego rozkładu naprężeń w kierunku podłużnym ($m = 1$) oraz różnych rozkładach naprężeń (w kierunku poprzecznym) w funkcji l_s/b_s .

Na rys. 8 porównano współczynnik k dla sprężysto zamocowanej ($\varepsilon = 2$, $\kappa = 0,5$) płyty wspornikowej przy liniowym rozkładzie naprężeń w kierunku podłużnym ($m = 1$) oraz różnych (liniowych) rozkładach w kierunku poprzecznym ($\alpha_s = -1, 0, 2, 3, 10^4$).

Na rys. 9 porównano współczynnik k dla sprężysto zamocowanej ($\varepsilon = 0,6$, $\kappa = 0,231$) płyty wspornikowej przy liniowym rozkładzie naprężeń w kierunku poprzecznym ($\alpha_s = 2$) oraz liniowym rozkładzie naprężeń w kierunku podłużnym dla parametru $m = 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1$.



Rys. 9. Współczynnik k dla liniowego w kierunku poprzecznym ($\alpha_s = 2$) i liniowego w kierunku podłużnym ($m = 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1$) rozkładu naprężeń w funkcji l_s/b_s .

4. Podsumowanie

Funkcja ugięcia płyty wspornikowej w postaci szeregu wielomianowo – sinusowego (4) umożliwia modelowanie warunków brzegowych na wzdłużnej krawędzi podpartej oraz aproksymację postaci wyboczenia przy wzdłużnej i poprzecznej zmienności naprężeń.

Uwzględnienie sprężystego zamocowania krawędzi płyty (ścianki) w segmencie pręta cienkościennego oraz wzdłużnej i poprzecznej zmienności naprężeń prowadzi do dokładniejszego oszacowania naprężeń krytycznych wyboczenia lokalnego. Dotyczy to zwłaszcza płyt wspornikowych (pólek), dla których zapasy lokalnej nośności krytycznej wynikające ze sprężystego zamocowania wzdłużnej krawędzi podpartej są większe niż dla obustronnie sprężysto zamocowanych płyt przęsłowych (średników).

Ze wzrostem wskaźnika utwierdzenia krawędzi płyty κ wg wzoru (2) oraz parametru wzdłużnego rozkładu naprężeń m wg (7) rosną naprężenia krytyczne sprężysto zamocowanych płyt wspornikowych. Mniejsze współczynniki k przy tych samych wartościach parametrów κ , α_s , m oraz l_s/b_s uzyskano dla nieliniowego rozkładu naprężeń normalnych na długości płyty (por. rys. 3 i 7).

Literatura

- 1 Szychowski A. *The stability of eccentrically compressed thin plates with a longitudinal free edge and with stress variation in the longitudinal direction*. Thin-Walled Structures 46(5) (2008) 494-505.
- 2 PN-EN 1993-1-3. Eurokod 3. *Projektowanie konstrukcji stalowych*. Część 1-3: *Reguły uzupełniające dla konstrukcji z kształtowników i blach profilowanych na zimno*.

- 3 Bulson P.S. *The stability of flat plates*. Chatto and Windus, London 1970.
- 4 Timoshenko S.P., Gere J.M. *Theory of elastic stability. Part II*. McGraw-Hill, New York, N.Y. 1961.
- 5 Yu C, Schafer BW. *Effect of longitudinal stress gradients on elastic buckling of thin plates*. J Eng Mech ASCE 133(4) (2007) 452-63.
- 6 Yu C, Schafer BW. *Effect of longitudinal stress gradient on the ultimate strength of thin plates*. Thin-Walled Structures 44 (2006) 787-799.
- 7 Szychowski A. *Stateczność sprężyste zamocowanych płyt wspornikowych przy wzdłużnej zmienności naprężeń*. 56 KN KILiW PAN i KN PZITB, Kielce - Krynica 2010.
- 8 Rykaluk K. *Pozostające naprężenia spawalnicze w wybranych stanach granicznych nośności*. Prace Naukowe Instytutu Budownictwa Politechniki Wrocławskiej, 29, seria: Monografie 11, Wrocław 1981.
- 9 Hancock G.J. *Design for distortional buckling of flexural members*. Thin-Walled Structures 27(1) (1997) 3-12
- 10 Rogers C.A., Schuster R.M. *Flange/web distortional buckling of cold-formed steel sections in bending*. Thin-Walled Structures 27(1) (1997) 13-29
- 11 Jakubowski S. *Macierzowa analiza stateczności i drgań własnych ścian dźwigarów cienkościennych*. Archiwum Budowy Maszyn XXXIII(4) (1986) 357-375.
- 12 Wolfram S. *Mathematica*. Cambridge University Press.

Local buckling of cantilever wall of thin-walled member with longitudinal and transverse stress variation

Andrzej Szychowski

*Department of Mechanics, Metal Structures and Computer Methods,
Faculty of Civil Engineering and Architecture, Kielce University of Technology,
e-mail: aszychow@tu.kielce.pl*

Abstract: The paper presents results of the investigation into the stability of elastically restrained cantilever walls (plates) with longitudinal and transverse stress variation. A linear distribution of stresses in the direction of the wall (plate) width and the linear or nonlinear (in accordance with parabola 2^0) distribution of stresses along the wall length were assumed. Plots of plate buckling coefficients (k) for variously supported and variously loaded cantilever plates, which are not found in the literature, were determined.

Keywords: thin-walled bars, open cross-section, cantilever walls, elastically restrained, longitudinal and transverse stress variation.

