

Geometryczne kształtowanie wybranych struktur dwuwarstwowych kopuł prętowych

Dominika Pilarska

*Katedra Konstrukcji Budowlanych i Inżynierskich, Wydział Budownictwa, Politechnika Opolska,
e-mail: d.pilarska@po.opole.pl*

Streszczenie: Przekrycia dużych powierzchni, takich jak obiekty sportowe, hale targowe, magazyny i inne, mogą być wykonane za pomocą form kopulastych. Konstrukcje tego typu, w szczególności prętowe, mają niewątpliwie dużą przewagę nad innymi budowlami dzięki swej lekkości czy też łatwości montażu i demontażu poszczególnych elementów. Podstawą generowania kopuł prętowych mogą być wielościany foremne. Ośmiościan, jako jeden ze wspomnianych wielościanów, stanowi punkt odniesienia do rozważań autora nad kształtowaniem przekryć kopulastych. Geometria i topologia węzłów pozwala na uzyskanie różnorodnych interesujących form ukształtowanych na konturach wyjściowego ośmiościanu foremnego. Połączenie dwóch struktur jednowarstwowych za pomocą prętów stężających umożliwia uzyskanie konstrukcji dwuwarstwowej, bardziej statecznej. Zmieniając odległość pomiędzy dwoma warstwami, czyli zakładając różne wartości promieni R_1 i R_2 opisujących sfery każdej warstwy otrzymujemy struktury różniące się między sobą geometrią. Dlatego też właściwe staje się poddanie analizie różnych parametrów geometrycznych badanych struktur. Wyniki otrzymanych obliczeń mogą stanowić dla projektanta podstawę wyboru szukanej formy przekrycia architektonicznego.

Słowa kluczowe: wielościany foremne, ośmiościan foremny, wielościany pochodne, jedno i dwuwarstwowe struktury prętowe

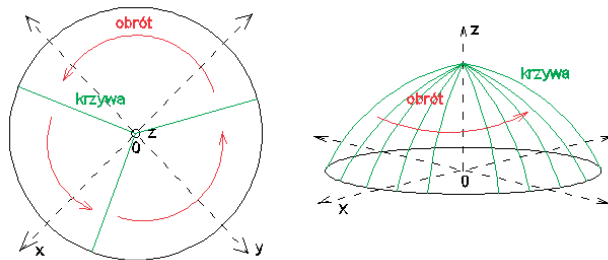
1. Wprowadzenie

Przekrycia w formie kopuł stanowią jedną z najstarszych form architektonicznych. Jeszcze z przed naszej ery znane są kopuły budowane z trzciny, wzmocnione gliną, chatki budowane w dolinach rzek, o podstawie kołowej lub owalnej, sklepione kopulastym dachem [1].

Inicjatorem kopuł geodezyjnych był niemiecki inżynier Walter Bauersfeld, który zaprojektował tego typu przekrycie z przeznaczeniem na planetarium w Jenie. W połowie XX wieku amerykański inżynier Buckminster Fuller rozwinął jego ideę i zaproponował metody podziału sfery na płaskie pola trójkątne w sposób dotychczas niespotykany. Metody przez niego opracowane polegały na rzutowaniu środkowym powierzchni ściany wielościanów foremnych, tj. 20-stościanu lub 12-stościanu foremnego na powierzchnię sfery. Opracowana w ten sposób geometria pozwalała na zaprojektowanie niespotykane dotąd lekkich i wytrzymałych kopuł geodezyjnych [2]. Dodatkową zaletą konstrukcji opartych o technologię Fullera jest fakt, że są to struktury samonośne, nie wymagające dodatkowych podpór wewnętrznych. Jako lekka architektura geodezyjna, mają szerokie i zróżnicowane zastosowanie, obejmujące między innymi możliwość przekrycia bardzo dużych i wymagających powierzchni [3].

Wybitnym kontynuatorem R.B.Fullera był Z. Makowski [4]. Pod względem naukowym kopułami pochodzącymi od 20- i 12-ścianu zajmowali się też m.in. T.Tarnai [5], J.Fuliński [3], J.Rębielak [6]. J.D.Clinton również rozpatruje wielościany i ich podział w swojej pracy [7]. Inne, oryginalne podejście zaproponował J.B.Obrębski – dzieląc sferę przecinającymi się wielkimi kołami [8].

Geometryczne pojęcie kształtowania kopuł, wiąże się najczęściej z klasyczną powierzchnią obrotową dwukrzywiznową, powstałą przez obrót linii krzywej lub prostej wokół pionowej osi przechodzącej przez punkt centralny najwyżej położony, co zostało przedstawione na Rys.1.



Rys. 1. Obrót krzywej wokół osi Z, tworząc teoretyczną powierzchnię obrotową

Taka dwukrzywiznowa powierzchnia obrotowa ma postać określoną równaniem (1):

$$x^2 + y^2 = [f(z)]^2 \quad (1)$$

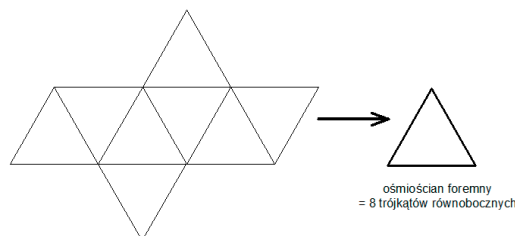
gdzie:

x, y, z – współrzędne punktów powłoki

$f(z)$ – funkcja krzywizny powłoki [9]

Geometria kopuł prętowych polega na połączeniu ich prętów w odpowiednich węzłach uzyskując jednowarstwowy ustrój statyczny. Poprzez połączenie dwóch jednowarstwowych kopuł za pomocą prętów stężających uzyskujemy konstrukcje dwuwarstwowe, bardziej stateczne. Cechą charakterystyczną kopuł prętowych jest możliwość zestawienia ich elementów w grupy o tych samych długościach. Wpływa to niewątpliwie na oszczędności materiałowe i produkcyjne, jak również szybszy i łatwiejszy montaż i demontaż poszczególnych elementów.

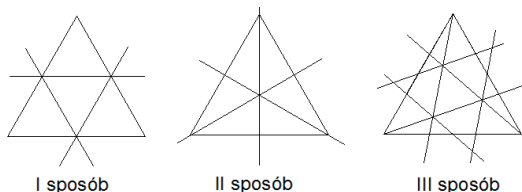
Wielościany foremne stanowią podstawę do projektowania kopuł prętowych sferycznych [10]. Omawiany w pracy temat kształtowania struktur dwuwarstwowych kopuł prętowych został opracowany na podstawie ośmiościanu foremnego. Składa się on z 8 ścian w kształcie identycznych trójkątów równobocznych (Rys.2), co niewątpliwie ułatwia przeprowadzanie obliczeń i analiz dzięki możliwości skoncentrowania się na jednym wyjściowym boku omawianego wielościanu. Otrzymane wyniki ostatecznie przekładane są na całe analizowane struktury.



Rys. 2. Siatka ośmiościanu foremnego

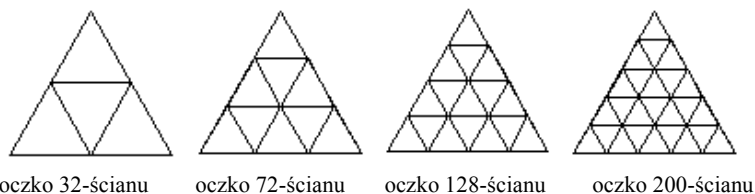
2. Zasady geometrycznego kształtowania kopuł prętowych wygenerowanych z ośmiościanu foremnego

W celu utrzymania wielościanów pochodnych z ośmiościanu foremnego, jego równoboczne ściany można dzielić na mniejsze części według znanych 3 sposobów podziału (przekształceń) [3]. Na rysunku 3 pokazano zasady podziału dotyczące wszystkich trzech sposobów.



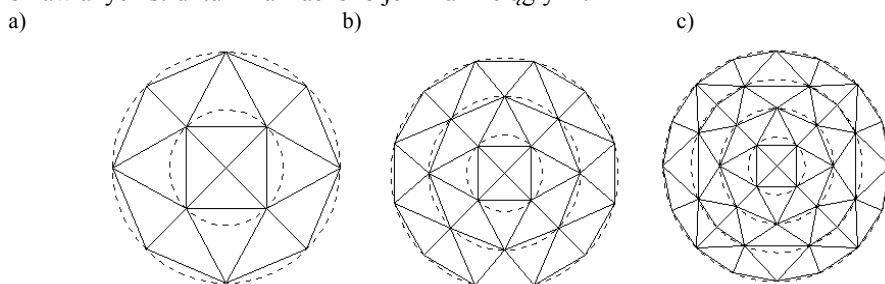
Rys. 3. Sposoby podziału trójkąta równobocznego

Pierwszy sposób podziału trójkąta równobocznego polega na podzieleniu każdej krawędzi na n części i poprowadzeniu trzech rodzin linii równoległych do każdego boku trójkąta. Stosując ten rodzaj podziału do wszystkich 8 ścian wyjściowego oktaedru otrzymujemy wielościany pochodne: 32-ścian, 72-ścian, 128-ścian, 200-ścian, itd. (Rys.4).



Rys. 4. Kolejne siatki wielościanów pochodnych utworzonych według I sposobu podziału jednego oczka ośmiościanu foremnego, czyli trójkąta równobocznego

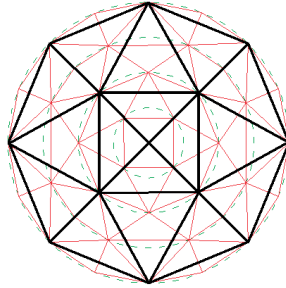
Wielościany pochodne utworzone według I sposobu podziału trójkąta równobocznego, odwzorowujące siatki jednowarstwowych kopuł prętowych zostały zaprezentowane na rysunku 5. Linie przerywane to linie pomocnicze, wykorzystane do wskazania wierzchołków (stanowiących węzły) powstałych poprzez kolejne podziały trójkąta równobocznego. Dzięki odpowiednim połączeniom wierzchołków otrzymano krawędzie, będące prętami omawianych struktur i zaznaczono je liniami ciągłymi.



Rys. 5. Siatki kopuł prętowych będących odwzorowaniem: a) 32-ścianu, b) 72-ścianu, c) 128-ścianu

Dwie siatki jednowarstwowych kopuł leżą na dwóch niezależnych sferach. Odległość pomiędzy nimi, będąca grubością dwukrzywiżnowej struktury prętowej określa stosunek promieni R_1 i R_2 współśrodkowych sfer opisujących węzły każdej siatki. Węzły te leżą na

dwóch niezależnych sferach. Zmiana grubości struktury dwuwarstwowej możliwa jest poprzez zmianę relacji promieni sfer opisujących węzły każdej z warstw. Na rysunku 6 przedstawiona została przykładowa siatka kopuły prętowej utworzonej z 32-ścianu i 128-ścianu. Linia ciągła gruba (czarna) odwzorowuje pręty jednowarstwowej kopuły utworzonej z 32-ścianu, z kolei linia ciągła cienka (czerwona) odnosi się do prętów kopuły wygenerowanej ze 128-ścianu. Linie przerywane to analogicznie jak na rysunku 5 – linie pomocnicze.



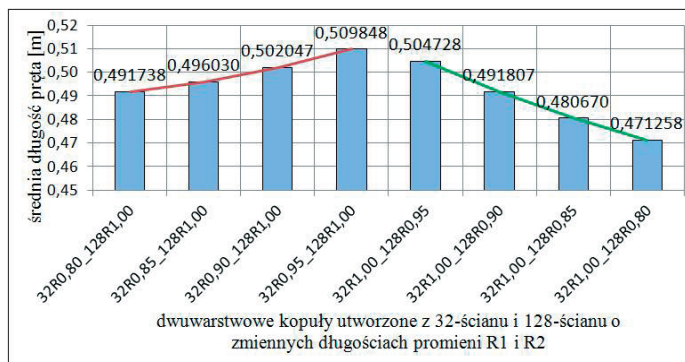
Rys. 6. Kupuła dwuwarstwowa otrzymana dzięki połączeniu dwóch jednowarstwowych siatek: 32-ścianu i 128-ścianu

3. Dwuwarstwowe kopuły utworzone z 32-ścianu i 128-ścianu

Jedną z rodzin dwuwarstwowych struktur prętowych możliwych do uzyskania dzięki zastosowaniu I sposobu podziału wyjściowego trójkąta równobocznego stanowią kopuły wygenerowane z siatek 32-ścianu i 128-ścianu. Przeanalizowanych zostało 8 modeli różniących się długościami promieni sfer opisujących każdą warstwę, czyli charakteryzujących się zmienną odległością pomiędzy swoimi jednowarstwowymi strukturami. Przyjęty został interwał zmiany relacji długości promieni co 0,05. W pierwszej kolejności model kopuły utworzonej ze 128-ścianu potraktowany został jako stały, o tym samym promieniu $R_2=1,00$ a zmianie ulegał promień R_1 opisujący kopułę utworzoną z 32-ścianu, następnie dokonana została zamiana i jako stała została ukształtowana kopuła utworzona z 32-ścianu przyjmując jednakowy promień $R_1=1,00$, a różnicując promień R_2 kopuły wygenerowanej ze 128-ścianu. Szczegółowe obliczenia geometryczne dotyczące 54 węzłów omawianych struktur, jak również odpowiednie ich połączenie ze sobą, pozwoliły na wygenerowanie prętów warstwy pierwszej, warstwy drugiej oraz prętów stężających i obliczenie długości każdego z nich. Dzięki temu otrzymano wyniki dotyczące średniej długości pręta w każdym omawianym dwuwarstwowym modelu. Rezultaty przeprowadzonego badania przedstawiono w tabeli 1 oraz na rysunku 7.

Tabela 1. Średnia długość pręta w poszczególnej dwuwarstwowej kopule utworzonej z 32-ścianu i 128-ścianu

32-ścian promień R_1	128-ścian promień R_2	średnia długość pręta [m]
0,80	1,00	0,491738
0,85	1,00	0,496030
0,90	1,00	0,502047
0,95	1,00	0,509848
1,00	0,95	0,504728
1,00	0,90	0,491807
1,00	0,85	0,480670
1,00	0,80	0,471258



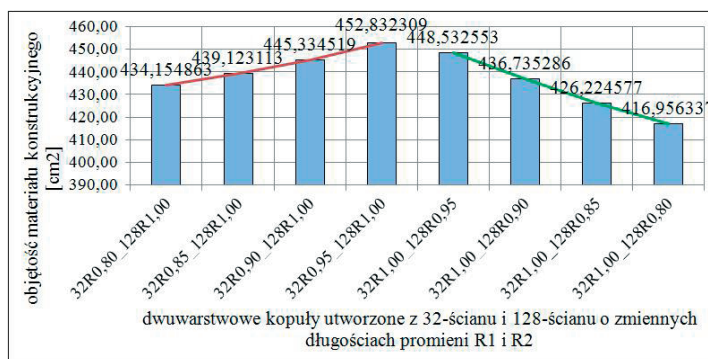
Rys. 7. Graficzne przedstawienie średniej długości pręta dla dwuwarstwowych kopuł utworzonych z 32-ścianu i 128-ścianu o zmiennych długościach promieni R1 i R2

Średnia długość pręta jest tym większa, im mniejszy rozstaw pomiędzy promieniami R1 i R2. W przypadkach, w których bardziej zaawansowana struktura stanowi warstwę wewnętrzną (128-ścian), średnie długości prętów są zdecydowanie mniejsze.

Wyniki dotyczące długości prętów pozwoliły na określenie objętości materiału konstrukcyjnego (stali), potrzebnego w celu wygenerowania analizowanych poszczególnych dwuwarstwowych struktur. W tabeli 2 zestawiono otrzymane wyniki a ich graficzna prezentacja umieszczona została na rysunku 8. Jeżeli warstwę wewnętrzną stanowi kopuła utworzona ze 128-ścianu, wówczas zostanie wykorzystane mniej materiału konstrukcyjnego, aniżeli w przypadku odwrotnym, kiedy struktura wygenerowana z 32-ścianu będzie stanowiła warstwę wewnętrzną.

Tabela 2. Objętość materiału konstrukcyjnego w poszczególnej dwuwarstwowej kopule utworzonej z 32-ścianu i 128-ścianu

32-ścian promień R1	128-ścian promień R2	objętość materiału konstrukcyjnego [cm ²]
0,80	1,00	434,154863
0,85	1,00	439,123113
0,90	1,00	445,334519
0,95	1,00	452,832309
1,00	0,95	448,532553
1,00	0,90	436,735286
1,00	0,85	426,224577
1,00	0,80	416,956337



Rys. 8. Graficzne przedstawienie objętości materiału konstrukcyjnego dla dwuwarstwowych kopuł utworzonych z 32-ścianu i 128-ścianu o zmiennych długościach promieni R1 i R2

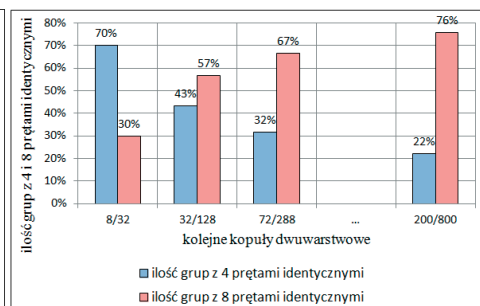
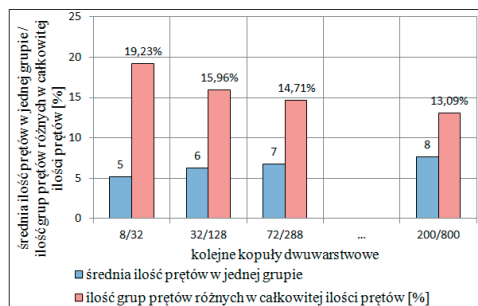
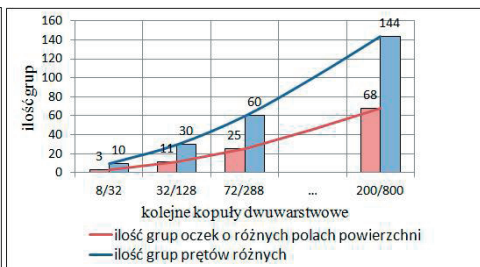
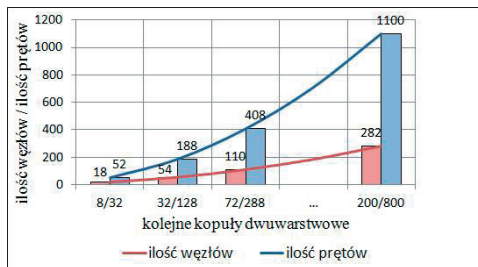
4. Porównanie parametrów geometrycznych różnych rodzin dwuwarstwowych struktur prętowych

Innymi rodzinami struktur dwuwarstwowych utworzonych na podstawie wielościanów pochodnych uzyskanych z I sposobu podziału trójkąta równobocznego mogą być kopuły wygenerowane z 8-ścianu i 32-ścianu, następnie omawiana w opracowaniu kopuła której podstawą są 32-ścian i 128-ścian, kolejne kopuły to dwuwarstwowe przekrycia utworzone z 72-ścianu i 288-ścianu czy też z 200-ścianu i 800-ścianu.

Wspominane dwuwarstwowe struktury można porównać ze sobą pod względem geometrycznym analizując takie parametry, jak: ilość węzłów, ilość grup oczek o różnych polach powierzchni, ilość prętów, ilość grup prętów różnych, średnia ilość prętów w jednej grupie czy też ilość prętów o tej samej długości w jednej grupie prętów. Wymienione parametry policzono i zestawiono w tabeli 3 a ich graficzne przedstawienie zaprezentowano za pomocą wykresów na rysunku 9.

Tabela 3. Ilościowe porównanie obliczonych parametrów geometrycznych dla poszczególnych dwuwarstwowych kopuł prętowych

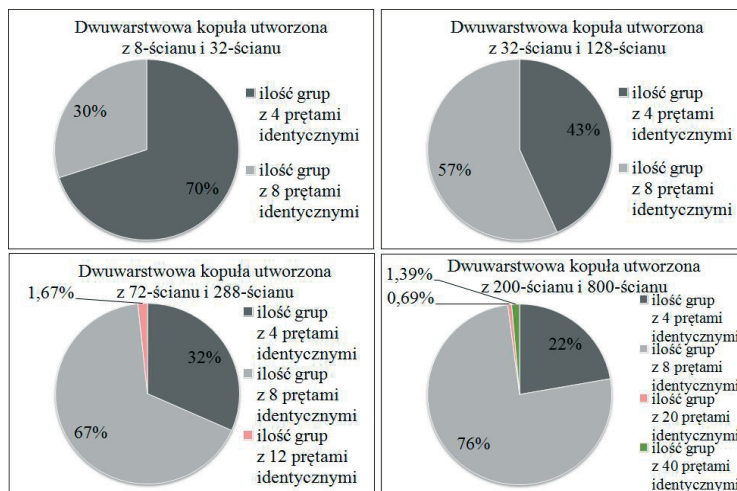
dwuwarstwowa kopuła	ilość węzłów	ilość grup oczek o różnych polach powierzchni	ilość prętów	ilość grup prętów różnych	średnia ilość prętów w jednej grupie	ilość grup prętów różnych w całkowitej ilości prętów [%]
8/32	18	3	52	10	5	19,23
32/128	54	11	188	30	6	15,96
72/288	110	25	408	60	7	14,71
...
200/800	282	68	1100	144	8	13,09



Rys. 9. Porównanie poszczególnych parametrów geometrycznych dwuwarstwowych kopuł prętowych utworzonych na podstawie I sposobu podziału trójkąta równobocznego

Ilości grup prętów różnych oraz oczek o tych samych polach powierzchni wzrastają wraz ze wzrostem zaawansowania kopuły, czyli wraz ze wzrostem zagęszczenia jej ścian kolejnymi prętami. Zwiększa się również średnia ilość prętów w jednej grupie. Z kolei maleje procentowy udział ilości grup prętów różnych w całkowitej ilości prętów.

Szczegółowa analiza kolejnych struktur dwuwarstwowych pokazała, że najczęściej grupy prętów o tych samych długościach składają się z 4 lub 8 prętów. W kopule utworzonej z 72-ścianu i 288-ścianu pojawia się dodatkowo jedna grupa z 12 prętami o tej samej długości, z kolei w kopule wygenerowanej z 200-ścianu i 800-ścianu: 1 grupa z 20 prętami o jednakowej długości oraz 2 grupy, w skład których wchodzi 40 prętów o jednakowej długości. Graficznie zaprezentowane zostało to na rysunku 10.



Rys. 10. Procentowy udział ilości grup z poszczególną liczbą prętów o tej samej długości w całkowitej ilości grup prętów różnych w kolejnych dwuwarstwowych kopułach prętowych utworzonych według I sposobu podziału trójkąta równobocznego

5. Podsumowanie

Przeanalizowanie długości prętów rodziny dwuwarstwowych kopuł prętowych utworzonych z 32-ścianu i 128-ścianu, różniących się między sobą odległością pomiędzy promieniami R1 i R2 opisującymi sfery każdej struktury, pozwoliło otrzymać wyniki dotyczące średniej długości pręta w każdym badanym modelu. Im odległość ta jest mniejsza, tym średnia długość pręta analizowanych kopuł jest większa. Podobne porównanie dokonano biorąc pod uwagę objętość stali będącej przyjętym materiałem konstrukcyjnym. W tym przypadku okazało się, że jeśli warstwę zewnętrzną stanowi kopuła mniej zaawansowana (32-ścian), a warstwę wewnętrzną kopuła charakteryzująca się większym zagęszczeniem prętów (128-ścian), wówczas objętości materiałów konstrukcyjnych przyjmują mniejsze wartości niż w sytuacji odwrotnej, czyli zamieniając relacje promieni R1 i R2 opisujących sfery analizowanych jednowarstwowych struktur i ustawiając jako kopułę zewnętrzną tę, która ma więcej prętów (128-ścian).

Kolejny etap opracowania stanowi przedstawienie wyników różnych parametrów geometrycznych i ich porównanie. Parametry te obliczone zostały dla wielościanów pochodnych od ośmiościanu foremego, odzwierciedlających następujące dwuwarstwowe kopuły prętowe: struktury wygenerowane z 8-ścianu i 32-ścianu, 32-ścianu i 128-ścianu, 72-ścianu i 288-ścianu oraz 200-ścianu i 800-ścianu. Wraz z zagęszczeniem wyjściowego boku ośmiościanu, a zatem wraz ze wzrostem ilości węzłów i prętów, wzrasta ilość grup prętów różnych, zwiększa się również średnia ilość prętów o tej samej długości w poszczególnych grupach. Dzięki przeprowadzonej szczegółowej analizie poszczególnych grup prętów różnych uzyskano wyniki dotyczące dokładnych ilości prętów w każdej grupie. Bardziej

zaawansowane dwuwarstwowe kopuły posiadają więcej grup składających się z większej ilości prętów o tej samej długości niż te, których struktury są mniej skomplikowane. Ma to niewątpliwie pozytywne odzwierciedlenie w praktyce i może stanowić jeden z punktów odniesienia dla projektanta przy wyborze odpowiedniej dwuwarstwowej struktury prętowej.

Literatura

- 1 Mirski J.Z.: Geneza i morfologia kopuł pełnościennych. Kwartalnik Architektury i Urbanistyki. 2/2002, str. 129.
- 2 Rębielak J.: Kształtowanie form powłokowych za pomocą elementów modułarnych. Praca doktorska WAPWr 1982.
- 3 Fuliński J.: Geometria kratownic powierzchniowych. Prace Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego. Seria B; nr 178/1973.
- 4 Makowski Z.S.: Räumliche Tragwerke aus Stahl. Verlag Stahleisen m.b.H. Düsseldorf 1963.
- 5 Tarnai T.: Spherical Grids of Triangular Network. Acta Technica Academiae Hungaricae. Tomus 76, 3-4 1974.
- 6 Rębielak J.: Struktury przestrzenne o dużych rozpiętościach. PNIAiU.PWr., Nr 27, Seria: Monografie Nr 15. Wyd. P.Wr. 1992.
- 7 J.D.Clinton, Advanced structural geometry studies, Part 1, Polyhedral subdivision concepts for structural applications, NASA Contractor Report, NASA CR-1734, Washington D.C., 1971.
- 8 Obrębski J.B.: Unidom-space bar system. Local Seminar of IASS Polish Charter; XII LSCE 2006; Warszawa 2006.
- 9 Fuller B.R.: Geodesic Tent. United States Patent Office, patent 2, 914, 074, Nov. 24/1959.
- 10 Mirski J.Z.: Geneza i morfologia kopuł prętowych w aspekcie geometrycznego kształtowania form architektonicznych, Monografie, studia, rozprawy 36, Kielce 2003

Geometric shaping of chosen two-layered bar domes

Dominika Pilarska

Department of Engineering and Civil Constructions, Faculty of Civil Engineering, Opole University of Technology, e-mail: d.pilarska@po.opole.pl

Abstract: The covering of large areas, such as sport areas, trade halls, warehouses and others, may be designed by using forms of spherical domes. Such constructions, especially bars ones, have undoubtedly big superiority in comparison to other structures, thanks to their light-weight or easy montage and dismantle system of particular elements. Regular polyhedra may constitute the basis for bar domes generating. Octahedron, one of the mentioned polyhedra, is for the author the basis for consideration the bar structures creation. The geometry and topology of nodes allow for the obtainment of different and interesting forms created on starting regular octahedron. The joint of two one-layered structures, using the jointing-bars, enables to obtain a two-layered structure, which is much more stable. Using different distance between two layers that is using different radiuses R_1 and R_2 describing spheres of each structure, we can receive models with different geometry. Thanks to that, it is appropriate to analyze different geometry parameters of researched domes. The results can be used by designers as the basis for the proper architectural spherical construction choice.

Keywords: regular polyhedra, regular octahedron, octahedron-based polyhedra, one- and two-layered bar structures