

## **Uwagi o obliczaniu szerokości rys w węzłach stropów zespolonych stalowo - betonowych**

**Michał Knauff<sup>1</sup>, Marcin Niedospiał<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> *Katedra Inżynierii Budowlanej, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego, e-mail: a.knauff@chello.pl*

<sup>2</sup> *Instytut Inżynierii Budowlanej, Wydział Inżynierii Lądowej, Politechnika Warszawska, e-mail: m.niedospial@il.pw.edu.pl*

**Streszczenie:** W artykule przedstawiono wybrane zagadnienia dotyczące zarysowania rozciąganej płyty żelbetowej w węzłach stropów zespolonych stalowo – betonowych. Według normy projektowania konstrukcji zespolonych [1] do obliczania szerokości rys wykorzystuje się zasady normy konstrukcji żelbetowych [2]. Z zaczerpniętego z [2] wzoru, w którym wzięto pod uwagę zjawisko „tension stiffening”, według [1] otrzymuje się zaskakująco duże naprężenia w zbrojeniu płyty, zwłaszcza dla niewielkiego stopnia zbrojenia. W związku z tym w artykule zamieszczono i skomentowano wyprowadzenie tego zaskakującego wzoru – rozpatrzono także przypadek nie uwzględniony w normie.

W [1] nie rozróżnia się zjawisk zachodzących w bezpośrednim sąsiedztwie słupa od zjawisk zachodzących w pewnym oddaleniu od słupa. W związku z tym, proponuje się stosowanie w analizach, podobnie jak w [2], obszarów typu D (D od słowa „discontinuity”) w bezpośrednim sąsiedztwie węzła oraz obszarów typu B (od Bernoulli) w pewnym oddaleniu od węzła.

Wywody teoretyczne rozpatrzono na tle wyników badań eksperymentalnych.

**Słowa kluczowe:** strop zespolony, konstrukcja zespolona, węzeł podatny, zarysowanie, tension stiffening

### **1. Wstęp**

Ostatnio oraz częściej stosuje się stropy, w których płyta żelbetowa (np. taka jak na rys. 4) jest zespolona z kształtownikiem stalowym za pomocą trzpieni lub innych łączników. Jeżeli schematem takiej konstrukcji jest belka ciągła lub rama, to w otoczeniu węzłów konstrukcji występują obszary, w których płyta żelbetowa znajduje się w strefie rozciąganej. Potrzebne jest zatem sprawdzenie szerokości rys w płycie.

Oprócz „klasycznych” węzłów przegubowych lub sztywnych stosuje się dziś węzły podatne. Podatność elementów węzła może mieć wpływ na naprężenia w zbrojeniu i szerokość rys.

Wraz z rozwojem wiedzy i zmianami norm dotyczących stali i żelbetu następowały zmiany w normach konstrukcji stalowo – betonowych. Pierwsze z tych norm zostały ustanowione w latach 1982-1991 [3], [4], [5]. W 2006 roku ukazała nowa norma projektowania konstrukcji zespolonych stalowo – betonowych [6] oparta na postanowieniach zawartych w Eurokodzie 4. W 2008 roku norma ta została zastąpiona przez aktualną [1].

Już pobieżne rozpatrzenie zawartej w [1] metody obliczania węzłów oraz sposobu obliczania zarysowania w stropach zespolonych może nasuwać pewne zastrzeżenia. Nie rozróżnia się jasno zjawisk zachodzących w przekrojach bezpośrednio sąsiadujących

z licem słupa od zjawisk zachodzących w dalszym otoczeniu słupa, co może mieć wpływ na obliczone naprężenia w zbrojeniu, a tym samym na szerokość rys. Według [1] szerokość rys oblicza się na podstawie [2], uwzględniając zjawisko „tension stiffening” (dalej w skrócie oznaczane przez TS). W elementach o niewielkim stopniu zbrojenia zjawisko to ma zaskakująco duży wpływ na naprężenia w zbrojeniu. W związku z tym w p.2 zamieszczono wyprowadzenie tego wzoru opracowane przez autorów (otrzymano wynik zgodny z normą z pewnymi uzupełnieniami).

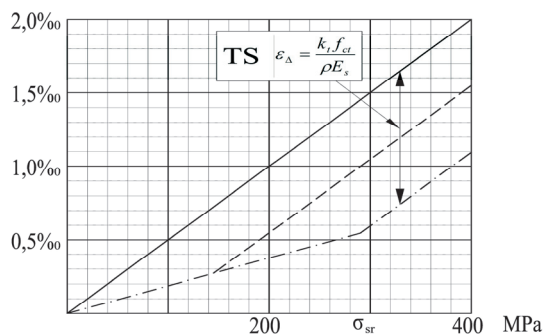
## 2. Obliczanie naprężeń w zbrojeniu

Teoria zarysowania według normy [2] dotyczy rys, które powstają na odcinku obciążonym stałym momentem i ma sens wtedy, gdy rozpatrywany odcinek ma odpowiednią długość. W związku z tym, przy analizie zarysowania płyty w otoczeniu węzła podatnego, należałoby wprowadzić rozróżnienie obszarów na obszary typu B (B od Bernoulli) i obszary typu D (D od słowa „discontinuity”), podobnie jak przy stosowaniu modeli „struts and ties” używanych do analizy żelbetu. W bezpośrednim sąsiedztwie słupa występuje obszar typu D, a w pewnej odległości od słupa występują obszary typu B, w których obowiązuje zasada płaskich przekrojów.

### 2.1. Obszary B

W obszarach B naprężenia w zbrojeniu (w zakresie sprężystej pracy elementu) można obliczać na podstawie klasycznej teorii, zakładając, że zarysowany beton nie przenosi naprężeń rozciągających.

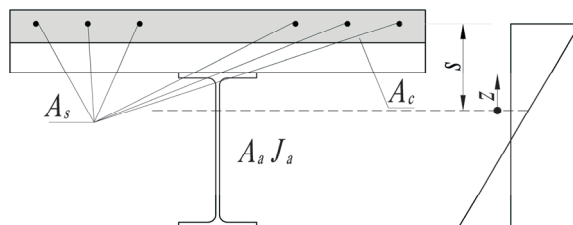
Klasyczne (tzn. bez uwzględniania zjawiska TS) rozwiązanie otrzymuje się zakładając, że maksymalne odkształcenie zbrojenia (tzn. odkształcenie w przekroju przez rysę) spełnia założenie płaskich przekrojów (wraz z odkształceniami kształtownika). Bardziej racjonalne jest założenie, że założenie płaskich przekrojów jest spełnione przez odkształcenia średnie. To założenie, przyjęte za podstawę w normie [1], prowadzi do wniosku, że naprężenia w zbrojeniu płyty są znacznie większe od naprężeń wyznaczonych klasycznie.



Rys. 1. Zasada „tension stiffening” według normy [1]. Stopień zbrojenia równy 1%,  $f_{ct} = 2,9$  MPa (linia kreska-kropka),  $f_{ct} = 1,45$  MPa (linia przerywana), zależność naprężenie-odkształcenie bez „tension stiffening” (linia ciągła)

Mechanizm zjawisk ilustruje rys. 1. Widać, że w rozpatrzonym na tym rysunku przypadku, dla średniego odkształcenia  $\varepsilon = 1\text{‰}$  otrzymuje się naprężenia w rysie równe 200 MPa, ale po uwzględnieniu TS naprężenia te osiągają aż 380 MPa (dla  $f_{ct} = 2,9$  MPa). Dla betonu o mniejszej wytrzymałości na rozciąganie przyrost naprężeń wywołany przez TS jest znacznie mniejszy.

Rozpatruje się przekrój według Rys. 2. Współrzedną  $z$  i odległość  $s$  odmierza się od środka ciężkości przekroju złożonego z kształtownika ( $A_a, J_a$ ) i zbrojenia  $A_s$ . Pole tego przekroju oznacza się przez  $A$ , a jego moment bezwładności względem osi środkowej przez  $J$ . Rozpatrzono dwa przypadki: pierwszy, gdy  $\sigma_s \leq \sigma_{sr}$  i drugi, gdy  $\sigma_s > \sigma_{sr}$  ( $\sigma_{sr}$  oznacza naprężenie w zbrojeniu, które powstaje natychmiast po zarysowaniu). Wzory w [1] oparte są na założeniu, iż zachodzi przypadek II. Przypadek I nie jest w [1] rozpatrzony



Rys. 2. Element zespolony stalowo - betonowy

**Przypadek I:  $\sigma_s \leq \sigma_{sr}$ .** Tu należy wyjaśnić, że taka możliwość występuje wtedy, gdy całe obciążenie charakterystyczne wywołuje zarysowanie, a obciążenie długotrwałe (dla którego wyznacza się szerokość rys) jest od obciążenia rysującego mniejsze. Teoria polega na stosowaniu przekroju sprowadzonego. Rozpatruje się przekrój sprowadzony złożony z kształtownika i ze zbrojenia, którego pole pomnożono przez stosunek  $E_1/E_s$ .  $E_1$  charakteryzuje tutaj model sprężystości zbrojenia współpracującego z betonem.

$$E_1 = \frac{\sigma_{sr}}{\varepsilon_{sr}}, \quad \sigma_{sr} = \frac{N_{cr}}{A_s} = \frac{f_{ct}}{\rho}, \quad \varepsilon_{sr} = \frac{\sigma_{sr}}{A_s E_s} - \frac{k_t f_{ct}}{\rho E_s} = (1 - k_t) \frac{f_{ct}}{\rho E_s} \quad (1)$$

$$\text{a więc } E_1 = \frac{E_s}{1 - k_t} \quad (2)$$

Przez  $\varepsilon_0$  i  $\sigma_0$  oznacza się odkształcenie i naprężenie na osi przekroju sprowadzonego. Pole przekroju sprowadzonego jest równe  $(A_k + A_s E_1/E_s)$ .

$$\text{Odkształcenie } \varepsilon = \varepsilon_0 + \kappa z \quad (3)$$

W kształtowniku:

$$\sigma = \sigma_0 + E_s \kappa z, \quad \text{gdzie } \sigma_0 = E_s \varepsilon_0 \quad (4)$$

W zbrojeniu:

$$\sigma_s = \varepsilon \frac{\sigma_{sr}}{\varepsilon_{sr}} = (\varepsilon_0 + \kappa s) E_1 = \varepsilon_0 E_1 + \kappa s E_1 = \sigma_0 \frac{E_1}{E_s} + \kappa s E_1. \quad (5)$$

Warunek równowagi momentów ma postać:

$$\int_{A_k} \sigma b z dz + A_s \sigma_s s = M \quad (6)$$

Podstawiając do (6) naprężenia według wzorów (4) i (5) oraz  $\sigma_0 = 0$  otrzymuje się

$$E_s \kappa \int_{A_k} b z^2 dz + E_1 A_s \kappa s^2 = M \quad (7)$$

Z (7) i (5) wynika, że

$$\text{krzywizna: } \kappa = \frac{M}{E_s J_E} \quad (8)$$

$$\text{naprężenie w zbrojeniu: } \sigma_s = \kappa s E_1 = \frac{M s}{J_E} \frac{E_1}{E_s} = \frac{M s}{J_E (1 - k_t)} \quad (9)$$

W powyższych wzorach  $J_E$  oznacza moment bezwładności przekroju sprowadzonego, zdefiniowanego na wstępie tego punktu.

Różnica odkształceń zbrojenia i betonu, potrzebna do obliczenia szerokości rys, jest równa:

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s}{E_1} - \frac{k_t f_{ct}}{E_{cm}} \frac{\sigma_s}{\sigma_{sr}} = \sigma_s \left( \frac{1 - k_t}{E_s} - \frac{k_t \rho}{E_{cm}} \right) \quad (10)$$

**Przypadek II:  $\sigma_s > \sigma_{sr}$ .** Naprężenia w zbrojeniu wyrazić można wzorem ( $\varepsilon_\Delta$  według rys. 1)

$$\sigma_s = E_s \left( \varepsilon + \varepsilon_\Delta \frac{\sigma_s}{\sigma_{sr}} \right) = E_s (\varepsilon_0 + \kappa s + \varepsilon_\Delta) = \sigma_0 + E_s \kappa s + E_s \varepsilon_\Delta \quad (11)$$

Podstawiając naprężenia według wzoru (11) do warunku równowagi sił otrzymuje się

$$\sigma_0 \int_{A_k} b dz + E_s \kappa \int_{A_k} b z dz + A_s \sigma_0 + E_s A_s \kappa s + E_s A_s \varepsilon_\Delta = 0 \quad (12)$$

Moment statyczny przekroju względem osi środkowej jest równy zero, a więc:

$$A \sigma_0 + E_s A_s \varepsilon_\Delta = 0$$

$$\sigma_0 = -\frac{A_s}{A} E_s \varepsilon_\Delta \quad (13)$$

Podstawiając naprężenia według wzoru (11) do warunku równowagi momentów otrzymuje się

$$E_s \kappa \int_{A_k} b z^2 dz + E_s A_s \kappa s^2 + E_s A_s \varepsilon_\Delta s = M \quad (14)$$

$$E_s \kappa J + E_s A_s \varepsilon_\Delta s = M \quad (15)$$

Z powyższych wzorów wynika, że:

$$\kappa = \frac{M - E_s A_s \varepsilon_\Delta s}{E_s J} = \frac{M}{E_s J} - \frac{A_s \varepsilon_\Delta s}{J} \quad (16)$$

$$\sigma_s = \sigma_0 + E_s \kappa s + E_s \varepsilon_\Delta = -\frac{A_s}{A} E_s \varepsilon_\Delta + \frac{M}{J} s - \frac{E_s A_s \varepsilon_\Delta s^2}{J} + E_s \varepsilon_\Delta \quad (17)$$

Podstawiając  $E_s \varepsilon_{\Delta} = \frac{k_t f_{ct}}{\rho}$  otrzymuje się wzór:

$$\sigma_s = \sigma_{s,0} + \Delta\sigma_s, \quad (18)$$

w którym  $\sigma_{s,0}$  oznacza naprężenie obliczone sposobem „klasycznym”, tzn. bez uwzględnienia TS.

$$\sigma_{s,0} = \frac{M}{J} s, \quad (19)$$

$$\Delta\sigma_s = \frac{k_t f_{ct}}{\rho} \left( 1 - \frac{A_s}{A} - \frac{A_s s^2}{J} \right). \quad (20)$$

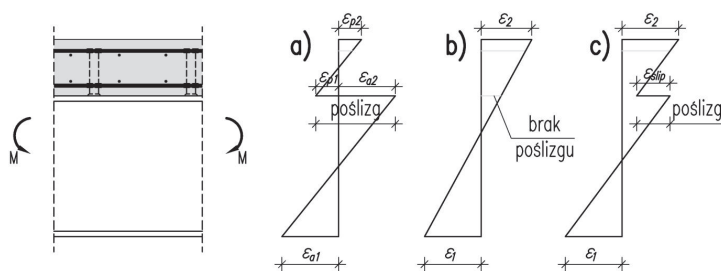
Po licznych, ale elementarnych przekształceniach (kompletne wyprowadzenie można znaleźć w [7]), wzór (20) można zapisać w postaci takiej jak w normie:

$$\Delta\sigma_s = \frac{k_t f_{ct}}{\alpha_{st} \rho_s}, \quad (21)$$

w której  $\alpha_{st} = \frac{AJ}{A_a J_a}$ ,  $\rho_s = \frac{A \cdot J}{A_a \cdot J_a}$ .

Do wzoru (18) należałoby jeszcze dodać zastrzeżenia dotyczące postępowania w przypadkach, w których obliczone naprężenie przekracza granicę plastyczności.

Wzór ten jest słuszny w przypadku pominięcia poślizgu pomiędzy belką a płytą. Badania wykazują, że w elementach o pełnym zespoleniu poślizg pomiędzy stalą a betonem spowodowany odkształcalnością łączników istnieje, ale ma nieznaczną wartość. Natomiast w przypadku zespolenia częściowego poślizg jest większy, co wpływa niekorzystnie na wielkość ugięć i odkształceń belek. Na Rys. 3 pokazano odkształcenia w przypadku braku zespolenia (Rys. 3a), w przypadku pełnego zespolenia (Rys. 3b) oraz w przypadku pośrednim zwanym niepełnym zespoleniem (Rys. 3c).



Rys. 3. Rozkład odkształceń w przekroju zespolonym (opis w tekście)

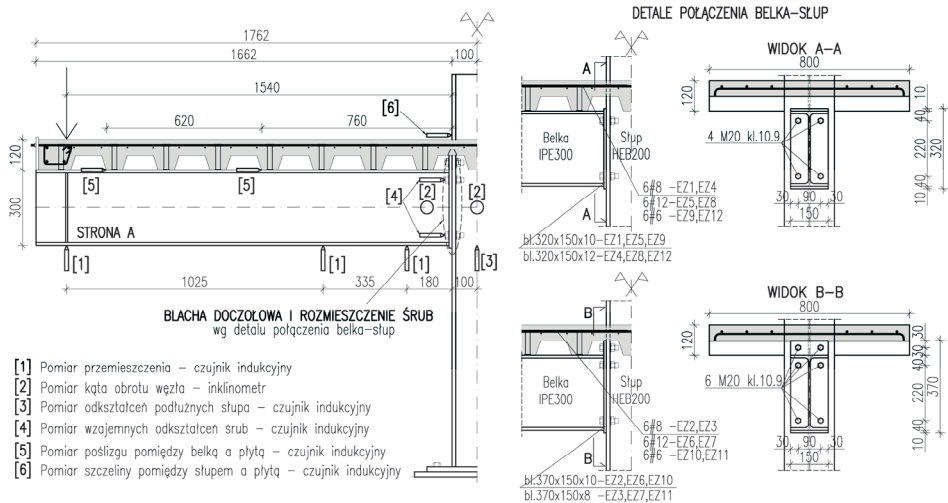
Sposoby wyznaczenia odkształceń spowodowanych poślizgiem znaleźć można m. in. w [8], [9].

## 2.2. Obszar D

W przekroju zlokalizowanym w tym obszarze naprężenia w zbrojeniu oblicza się rozpatrując równowagę węzła. Skorzystać można z modelu mechanicznego węzła przedstawionego w normie [10] z uwzględnieniem zaleceń normy [1] lub modeli dostępnych w literaturze np. [11]. Zagadnienie to rozpatrzono w pracy [7] – tu je pominiemy.

### 3. Badania doświadczalne

Badania przeprowadzone zostały w laboratorium Instytutu Inżynierii Budowlanej na Wydziale Inżynierii Lądowej Politechniki Warszawskiej. Podstawowe dane przedstawiono na Rys. 4 oraz w Tabeli 1.



Rys. 4. Schemat badanych elementów.

Tabela 1. Zestawienie badanych elementów

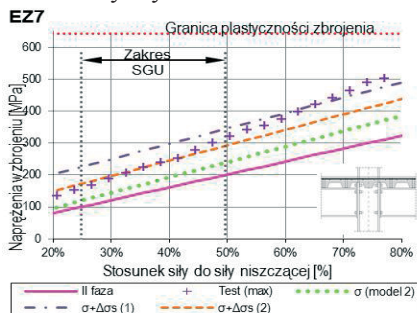
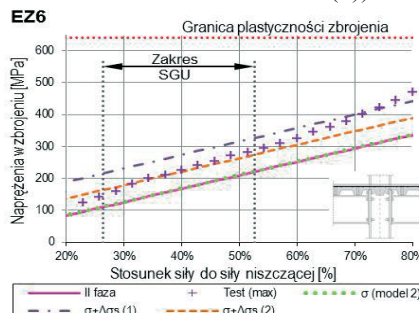
Nazwa elementu	Zbrojenie płyty	Liczba śrub	Grubość blachy czołowej
		[szt.]	[mm]
Elementy zespolone o stopniu zbrojenia $\rho=0,34\%$	EZ9	6 $\phi$ 6	10
	EZ10	6 $\phi$ 6	10
	EZ11	6 $\phi$ 6	8
	EZ12	6 $\phi$ 6	12
Elementy zespolone o stopniu zbrojenia $\rho=0,61\%$	EZ1	6 $\phi$ 8	10
	EZ2	6 $\phi$ 8	10
	EZ3	6 $\phi$ 8	8
	EZ4	6 $\phi$ 8	12
Elementy zespolone o stopniu zbrojenia $\rho=1,37\%$	EZ5	6 $\phi$ 12	10
	EZ6	6 $\phi$ 12	10
	EZ7	6 $\phi$ 12	8
	EZ8	6 $\phi$ 12	12

Dalej omówiono tylko wyniki dla  $\rho = 1,37\%$ .

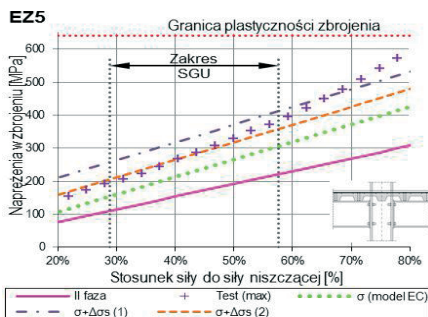
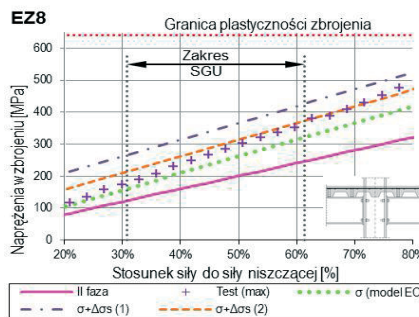
Na Rys. 5 i Rys. 6 przedstawiono naprężenia w zbrojeniu w zależności od obciążenia. Na wykresach umieszczono linie określające naprężenia:

1. Obliczone według klasycznej teorii liniowej bez TS (linia ciągła - II faza),
2. Wynik doświadczenia (linia złożona z krzyżyków – Test (max)),
3. Obliczone na podstawie modelu węzła z blachą wystającą opracowanego w pracy [7] (linia złożona z kropek -  $\sigma$  (model 2)), lub na podstawie modelu węzła z blachą zlicowaną opracowanego na podstawie modelu normowego węzła (linia złożona z kropek -  $\sigma$  (model EC)), z uwzględnieniem poślizgu, przy założeniu sztywności sworzni łączącego płytę i belką o wartości 150 kN/mm,

4. Obliczone jak w p. 3 z uwzględnieniem zjawiska TS i pełnej wytrzymałości betonu na rozciąganie (linia złożona z kresek i kropek -  $\sigma + \Delta\sigma_s$  (1))
5. Obliczone jak w p. 3 z uwzględnieniem zjawiska TS i zredukowanej (o 50%) wytrzymałości betonu na rozciąganie (linia złożona z kresek -  $\sigma + \Delta\sigma_s$  (2))

E27 ( $\rho=1,37\%$ , blacha 8 mm, 6 M20)E26 ( $\rho=1,37\%$ , blacha 10mm, 6 M20)

Rys. 5. Napięcia w zbrojeniu – elementy z blachą wystającą o największym stopniu zbrojenia

E25 ( $\rho=1,37\%$ , blacha 10mm, 4 M20)E28 ( $\rho=1,37\%$ , blacha 12 mm, 4 M20)

Rys. 6. Napięcia w zbrojeniu – elementy z blachą zlicowaną o największym stopniu zbrojenia

Zaobserwowano, że zarysowanie następuje wcześniej niż przewiduje teoria. Prawdopodobnie na skutek ograniczenia swobody odkształceń skurczowych pojawiają się w płycie dodatkowe naprężenia rozciągające. Zjawisko to można uwzględnić stosując efektywną wytrzymałość na rozciąganie, mniejszą od rzeczywistej.

#### 4. Podsumowanie i wnioski

Przy obliczaniu naprężeń w zbrojeniu w konstrukcjach z węzłami podatnymi należy, podobnie jak w [2], rozróżnić dwa rodzaje obszarów – obszary D oraz obszary B. W obszarach D siłę i naprężenia w zbrojeniu należy obliczać rozpatrując równowagę węzła, korzystając z metody składnikowej opisanej w [10] albo z modeli opisanych w piśmiennictwie. W obszarach B naprężenia w zbrojeniu wyznacza się korzystając z klasycznej teorii. W obu przypadkach należy brać pod uwagę zjawisko „tension stiffening”.

Dla elementów o niewielkim stopniu zbrojenia składnik opisujący zjawisko TS osiąga zaskakująco duże wartości. W artykule zamieszczono wyprowadzenie tego wzoru. Istotnym czynnikiem jest wytrzymałość betonu na rozciąganie. Płyta zespolona z kształtownikiem stalowym i blachą nie ma swobody odkształceń skurczowych, wskutek czego podczas wysychania mieszanki betonowej w płycie pojawiają się naprężenia rozciągające i rysy. Wydaje się, że z tego powodu przy obliczaniu naprężeń w zbrojeniu należałoby przyjmować mniejszą od rzeczywistej wytrzymałość betonu na rozciąganie.

## Literatura

- 1 PN-EN 1994-1-1:2008 Eurokod 4: Projektowanie zespolonych konstrukcji stalowo-betonowych, Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków.
- 2 PN-EN 1992-1-1:2008 Eurokod 2: Projektowanie konstrukcji z betonu, Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków.
- 3 PN-B-03264:2002: Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone. Obliczenia statyczne i projektowanie.
- 4 PN-B-03300:1982: Konstrukcje zespolone stalowo-betonowe. Obliczenia statyczne i projektowanie. Belki zespolone krępe.
- 5 PN-B-03302:1991: Konstrukcje zespolone stalowo-betonowe. Obliczenia statyczne i projektowanie. Słupy.
- 6 PN-B-03300:2006: Konstrukcje zespolone stalowo-betonowe. Obliczenia statyczne i projektowanie.
- 7 Niedośpiał M. Nośność i odkształcalność węzłów stalowo – betonowych stropów zespolonych – rola żelbetu, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, Warszawa 2013.
- 8 Johnson R.P. Composite Structures of Steel and Concrete. Volume I. Beams, Slabs, Columns and Frames for Buildings, Blackwell Scientific Publications, 1994.
- 9 Kucharczuk W. Belki zespolone stalowo – betonowe w konstrukcjach budowlanych, Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, 2001.
- 10 PN-EN 1993-1-8:2006 Eurokod 3: Projektowanie konstrukcji stalowych, Część 1-8: Projektowanie węzłów.
- 11 Ahmed B., Nethercot A. Prediction of Initial Stiffness and Available Rotation Capacity of Major Axis Composite Flush Endplate Connections, Journal of Constructional Steel Research, vol. 41, no. 1, 1997.

## Comments concerning crack width calculation in joints of steel-concrete composite slabs

Michał Knauff<sup>1</sup>, Marcin Niedośpiał<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Department of Civil Engineering, Faculty of Civil and Environmental Engineering, Warsaw University of Life Sciences - SGGW, e-mail: a.knauff@chello.pl

<sup>2</sup> Institute of Building Engineering, Faculty of Civil Engineering, Warsaw University of Technology, e-mail: m.niedospial@il.pw.edu.pl

**Abstract:** In this paper some aspects of the calculation of the width of cracks in joints of steel-concrete composite slabs are reported. The code concerning design of composite steel and concrete structures for the calculation of crack widths refers to the code of reinforced concrete structures. The application of the formula, which takes into account „tension stiffening”, seems to lead to surprising results - for the elements with small reinforcement ratio, the obtained stress is much greater than the stress calculated in classical way i.e. without tension stiffening. The authors present the derivation of this formula - the result corresponds to the formula in the code but in the paper an additional case is taken into account. Furthermore, the authors suggest to consider two types of areas as in the RC code. Type D (D from "discontinuity") should be analyzed in the close surrounding of the column and type B (B from Bernoulli) areas at some distance from the column.

**Keywords:** steel-concrete composite slab, steel-concrete composite structure, semi-rigid joint, cracking, tension stiffening