# Metody analizy pracy przekroju żelbetowego mimośrodowo ściskanego w stanie deformacji pokrytycznych

#### Jacek Korentz

Instytut Budownictwa, Wydział Inżynierii Lądowej i Środowiska, Uniwersytet Zielonogórski, e-mail: j.korentz@ib.uz.zgora.pl

**Streszczenie:** W wielu przypadkach konstrukcje mogą pracować w stanie deformacji pokrytycznych, jak ma to miejsc podczas wstrząsów sejsmicznych o dużej intensywności, czy też podczas oddziaływań wyjątkowych takich jak eksplozja, katastrofy komunikacyjne. Konstrukcje poddane takim oddziaływaniom muszą wykazywać się wystarczającą nośnością po przejściu w fazę pracy plastycznej. Dlatego konstrukcje te muszą charaktery-zować się odpowiednią ciągliwością globalną i lokalną. Aby dokonać oceny ciągliwości projektowanych konstrukcji żelbetowych konieczne jest korzystanie z metod analitycznych, które dają możliwość prognozowania zachowania tych elementów. Z tego względu metody te powinny być proste na tyle, aby pozwalały na racjonalną ocenę pracy konstrukcji w stanie deformacji pokrytycznych. W artykule, który jest kontynuacją pracy [10], zaprezentowano metody analizy i oceny pracy przekroju żelbetowego, poddanego ściskaniu mimośrodowemu, w stanie deformacji pokrytycznych.

Słowa kluczowe: słup żelbetowy, przekrój, mimośrodowe ściskanie, ciągliwość, krzywizna, stan pokrytyczny

### 1. Wprowadzenie

pracy elementów żelbetowych w Analiza stanach granicznych nośności i użytkowalności wg Eurokodu 2 [13] jest stosowana w klasycznych sytuacjach projektowania konstrukcji. Sa jednak przypadki, kiedy konieczna jest nietypowa analiza konstrukcji, która może dotyczyć konstrukcji o szczególnej odpowiedzialności, konstrukcji narażonych na działanie obciażeń wyjatkowych, czy też konstrukcji zlokalizowanych na terenach aktywnych sejsmicznie. W przypadku oddziaływań sejsmicznych będa to metody analizy konstrukcji zgodne z postanowieniami Eurokodu 8 [14] i wówczas niezbędna jest ocena zachowania projektowanych konstrukcji w stanie deformacji pokrytycznych. Dlatego należy sprawdzić czy konstrukcja charakteryzuje się odpowiednia ciagliwościa globalna i lokalna. Wymaga to zastosowania bardziej złożonych metod analizy konstrukcji [1,2], innych niż w przypadkach typowych, ponieważ konstrukcje doznają dużych deformacji po uplastycznieniu materiałów, z których są wykonane.

W tym celu należy stosować odpowiednie związki konstytutywne dla betonu i stali, w szczególności opisujące zależności między naprężeniami a odkształceniami po uplatycznieniu. Konieczne jest też uwzględnienie dynamicznego charakteru obciążeń, a także, co jest z tym związane ich cyklicznego działania, co czyni analizę zachowania konstrukcji bardziej złożoną. Wówczas metody analityczne stają się bardzo rozbudowane, a do tego są czaso i pracochłonne. Bardzo pomocne w tym przypadku są metody numeryczne bazujące na metodzie elementów skończonych, np. aplikacja Xtract [16]. Jednak metody analityczne oceny pracy konstrukcji w stanie deformacji pokrytycznych można bardzo uprościć bez szkody dla ich dokładności. W niniejszym artykule zaprezentowano metodę analizy przekroju żelbetowego obciążonego mementem zginającym i siłą podłużą. Metoda ta może mieć zastosowanie zarówno dla obciążeń monotonicznych jak i obciążeń cyklicznych [6], a uzyskane tą drogą wyniki mogą posłużyć do prognozowania i oceny pracy prętowych elementów żelbetowych w zakresie deformacji pokrytycznych.

## 2. Krzywe interakcji

Analiza pracy przekroju zginanego z udziałem podłużnej siły ściskającej lub rozciągającej jest bardziej złożona niż analiza pracy przekroju poddanego tylko zginaniu. Jeżeli w przekroju działa moment zginający (M) oraz siła podłużna (N), to osiągnięcie stanu granicznego nośności może być zobrazowane w układzie sił przekrojowych N-M, lub w układzie bezwymiarowych sił przekrojowych m-n, jako pewna krzywa zamknięta. Krzywe takie nazywane są krzywymi interakcji lub krzywymi nośności. Krzywe te mogą być zbudowane dla stanu granicznej nośności sprężystej, dla stanu granicznej nośności plastycznej, a także dla dowolnie zdefiniowanych stanów wytężenia przekroju. Na rys.1a przedstawiony jest przykład krzywej interakcji dla przekroju prostokątnego, symetrycznie zbrojonego, o łącznym stopniu zbrojenia podłużnego ρ.





W celu analizy i oceny deformacji przekroju konieczne jest wprowadzenia parametru pozwalającego na taką ocenę. Tym parametrem jest krzywizna przekroju  $\varphi$ , która zmienia się i ma inną wartość w każdym punkcie krzywej nośności. Krzywizna określana jest na podstawie stanu wytężenia przekroju zdefiniowanego przez odkształcenie w skrajnym ściskanym włóknie betonu i odkształcenie w zbrojeniu rozciąganym. Wówczas można zbudować krzywą interakcji siły podłużnej i krzywizny (n- $\varphi$ ), która jest zilustrowana na rys.1b [12]. Jak można zauważyć na tym rysunku największa krzywizna przekroju ma miejsce dla czystego zginania (n=0), a następnie zmniejsza się nieliniowo do zera dla przypadku ściskania osiowego (m=0).

## 3. Metody oceny ciągliwości

Ciągliwość przekroju mimośrodowo ściskanego można określić na podstawie zmiany krzywizny od chwili uplastycznienia przekroju do chwili wyczerpania nośności. Na rys.2 zilustrowano dwie metody [12] oceny ciągliwości przekroju mimośrodowo ściskanego. Rys.2a przedstawia krzywe interakcji moment-siła podłużna dla stałych umownie przyjętych krzywizn przekroju, między innymi krzywiznę w chwili zarysowania przekroju

 $\varphi_{cr}$ . Początkowy punkt krzywej interakcji dla krzywizny przekroju  $\varphi_{cr}$  (punkt "0") jest określany dla czystego zginania, a następnie śledzone są zmiany momentu zginającego przenoszonego przez przekrój, gdy pojawia się wzrastająca siła podłużna (kolejne punkty na krzywej interakcji: 1,2,3,...). Krzywe interakcji mogą być określane dla innych krzywizn zdefiniowanych na podstawie ustalonego stanu wytężenia przekroju. Może to być krzywizna określona na przykład w chwili uplastycznienia przekroju  $\varphi_{sy}$ , krzywizna wytężenia przekroju. Mając tak zdefiniowane kontury krzywych nośności dla przekrojów o różnych krzywiznach, ciągliwość można oceniać dla różnych wartości siły podłużnej (na przykład dla zadanej siły n<sub>1</sub>) porównując krzywizny w chwili uplastycznienia przekroju  $\varphi_{sy}$  i krzywiznę w stanie nośności granicznej  $\varphi_{cu}$ .



Rys. 2. Ocena ciągliwości: a) krzywe interakcji o takiej samej krzywiźnie, b) zależność moment zginający - krzywizna dla różnych wartości siły podłużnej

Druga metoda analizy ciągliwości przekroju mimośrodowo ściskanego, zilustrowana na rys.2b, polega na budowaniu zależności pomiędzy momentem zginającym a krzywizną przekroju dla ustalonego poziomu siły podłużnej. Na rysunku tym przedstawione są również przykładowe stany odkształceń przekroju w chwili uplastycznienia przekroju i w chwili odspojenia otuliny. Przebieg krzywych zachowania przekroju, a także współrzędne charakterystycznych punktów zależności moment-krzywizna uzyskuje się z warunków równowagi sił przekrojowych. Ta druga metoda oceny ciągliwości przekroju jest bardziej czytelna w porównaniu z metodą pierwszą polegającą na budowaniu krzywych nośności charakteryzujących się taką samą krzywizną.

Prezentowane metody analizy przekroju mimośrodowo ściskanego dotyczy tylko przekrojów występujących w słupach krępych i dlatego nie uwzględniono wpływu smukłości i wpływu pełzania.

## 4. Zależność moment zginający-krzywizna

Korentz [8,10] w pracach zaprezentował metody analizy pracy przekroju zginanego w stanie deformacji pokrytycznych. W metodach tej zostały zdefiniowane fazy pracy przekroju zginanego, są to: zarysowanie elementu, uplastycznienie zbrojenia rozciąganego, kruszenie betonu otuliny, odspojenie betonu otuliny, wyboczenie ściskanych prętów zbrojenia podłużnego i stabilizacja nośności. Dla tak zdefiniowanych stanów wytężenia przekroju są obliczane momenty zginające i krzywizny przekroju, na podstawie których można zbudować zależność moment - krzywizna dla przekroju prostokątnego dowolnie zbrojonego.

Taki sposób analizy pracy przekroju zginanego można również zastosować w analizie przekroju w przypadku jednoczesnego działania momentu zginającego i siły podłużnej. Analiza polega na budowaniu zależności moment-krzywizna dla ustalonych poziomów siły podłużnej. Stan odkształceń i stan naprężeń w przekroju, a także siły przekrojowe w przekroju zginanym poddanym działaniu podłużnej siły ściskającej N<sub>o</sub> jest przedstawiony na rys.3.



Rys. 3. Przekrój zginany z udziałem początkowej siły podłużnej: stan odkształceń, stan naprężeń, siły przekrojowe

Charakterystyczne punkty zależności moment-krzywizna są obliczane dla następujących stanów wytężenia przekroju: zarysowania przekroju (punkty na rys.4 i rys.5 oznaczone CR), uplastycznienia przekroju (SY), kruszenia betonu otuliny (CU), odspojenia otuliny (CS), wyboczenia prętów zbrojenia ściskanego (SF) i stabilizacji nośności (SFU).

Bezwymiarowa wartość początkowej siły podłużnej  $n_o$  działającej w przekroju, odniesiona do nośności przekroju betonowego, jest równa:

$$n_o = \frac{N_o}{f_{co}bh} \tag{3}$$

Krzywizny przekroju w charakterystycznych punktach krzywej moment-krzywizna przed odspojeniem otuliny i po odspojeniu otuliny obliczane są odpowiednio z zależności:

$$\phi = \frac{\varepsilon_c}{\xi}, \ \phi = \frac{\varepsilon_{s2}}{\xi - \beta_2}, \tag{4,5}$$

w których względna wysokość strefy ściskanej  $\xi$  jest obliczana z warunku równowagi sił przekrojowych ( $\Sigma X=0$ ) z uwzględnieniem działania początkowej siły podłużnej  $N_o$ :

$$\frac{1}{f_{co}bd}\sum \begin{bmatrix} F_{c1} \\ F_{c2} \\ F_{cc} \\ F_{s2} \\ -F_{s1} \end{bmatrix} - \frac{1}{f_{co}bh}N_{o} = \sum \begin{bmatrix} \eta_{c1}(1-2\beta_{b})\beta_{2} \\ 2\eta_{c2}\beta_{b}\xi \\ \eta_{cc}k(1-2\beta_{b})(\xi-\beta_{2}) \\ p\omega_{1}\alpha_{2} \\ -\omega_{1}\alpha_{1} \end{bmatrix} - n_{o} = 0$$
(6)

Po obliczeniu względnej wysokości strefy ściskanej przekroju  $\xi$  bezwymiarowy moment zginający m przenoszony przez przekrój może być obliczany, na podstawie warunku równowagi sił przekrojowych ( $\Sigma$ M=0), z zależności:

$$m = \frac{M}{f_{co}bd^{2}} = \sum \begin{bmatrix} \eta_{c1} (1 - 2\beta_{b})\beta_{2} \\ 2\eta_{c2}\beta_{b}\xi \\ \eta_{cc}k (1 - 2\beta_{b})(\xi - \beta_{2}) \\ p\omega_{1}\alpha_{2} \\ \omega_{1}\alpha_{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.5\beta_{h} - \lambda_{c1}\beta_{2} \\ 0.5\beta_{h} - \lambda_{c2}\xi \\ 0.5\beta_{h} - \beta_{2} - \lambda_{cc} (\xi - \beta_{2}) \\ 0.5\beta_{h} - \beta_{2} \\ 0.5\beta_{h} - \beta_{1} \end{bmatrix}$$
(7)

gdzie: ξ=x/d jest względną wysokością strefy ściskanej,

fco, fsy to wytrzymałość betonu na ściskanie i granica plastyczności zbrojenia,

 $\omega_l = \rho_l f_{sy} / f_{co}$  to mechaniczny stopień zbrojenia rozciąganego,

 $p = \rho_2 / \rho_1$  iloraz stopnia zbrojenia w strefie ściskanej i strefie rozciąganej,

 $\lambda_c$ ,  $\eta_c$  i  $\lambda_{cc}$ ,  $\eta_{cc}$  są parametrami zastępczej bryły naprężeń ściskających odpowiednio betonu otuliny i betonu uzwojonego,

k jest uśrednionym parametrem modelu betonu Kenta-Parka,

 $\beta_b = c/b$ ,  $\beta_2 = a_2/d$ ,  $\beta_h = h/d$  to parametry otuliny przekroju,

 $\alpha_1 = \sigma_{s1}/f_{sy}$  i  $\alpha_2 = \sigma_{s2}/f_{sy}$  to wskaźniki poziomu naprężeń odpowiednio w zbrojeniu rozciąganym i zbrojeniu ściskanym.

Modele betonu otuliny i betonu rdzenia przekroju są różne, a w celu uproszczenia analizy przyjmuje się w betonie strefy ściskanej zastępcze prostopadłościenne bryły naprężeń [4,12,15], opisane parametrami  $\lambda$  i  $\eta$ . Natomiast w modelu prętów ściskanych uwzględnione jest ich niesprężyste wyboczenie.

## 5. Przykłady analizy pracy przekroju

Na podstawie prezentowanych wzorów można analizować pracę przekrojów mimośrodowo ściskanych dla różnych parametrów przekroju i różnych poziomów siły osiowej.



Rys. 4. Wpływ poziomu siły osiowej na pracę przekroju podczas zginania

Na rys.4 przedstawiono wyniki analizy wpływy wielkości początkowej podłużnej siły ściskającej  $n_o$  na pracę przekroju żelbetowego poddanego zginaniu. Parametry przekroju są również zamieszczone na tym rysunku. Obliczenia przeprowadzono dla modelu betonu otuliny Kent Park [5], dla betonu wewnątrz szkieletu zbrojenia przyjęto model Kent Park

według propozycji Korentz [7], który jest uśrednionym modelem Kent-Park dla betonu nieuzwojonego [5] i betonu uzwojonego [11]. Wytrzymałość betonu i granica plastyczności wynosiły odpowiednio  $f_{co}$ =25MPa,  $f_{sy}$ =400MPa. Dla zbrojenia ściskanego przyjęto model Korentz [9], a dla zbrojenia rozciąganego model sprężysto plastyczny ze wzmocnieniem  $\varepsilon_{sh}$ =0.01,  $f_{su}$ =600MPa.

Jak można zauważyć na wykresach z rys.4 poziom siły podłużnej  $n_o$  ma bardzo duży wpływ na pracę przekroju żelbetowego. Działanie siły podłużnej zwiększa wartość maksymalnego momentu zginającego przenoszonego przez przekrój. Nośność na zginanie rośnie wraz ze wzrostem siły podłużnej, której wartość nie przekracza około 50% nośności betonu przekroju ( $n_o=0.5$ ); dla większych wartości siły podłużnej nośność przekroju na zginanie raptownie maleje. Ponad to działanie siły podłużnej istotnie obniża krzywiznę przekroju w charakterystycznych punktach krzywej zachowania przekroju; ze wzrostem siły podłużnej maleje krzywizna w chwili kruszenia betonu otuliny, odspojenia otuliny i w chwili wyboczenia prętów zbrojenia podłużnego. Nawet nie duża wartość siły podłużnej,  $n_o=0.05$ , powoduje blisko dwukrotny spadek krzywizny w chwili wyboczenia prętów zbrojenia podłużnego. Dla większych wartości początkowej siły podłużnej  $n_o>0.2$ raptowny spadek nośności ma miejsce już od chwili odspojenia otuliny, a nawet kruszenia betonu otuliny. Świadczy to o bardzo destrukcyjnym wpływie ściskającej siły podłużnej na prącę przekroju zginanego.

Działanie siły podłużnej przyczynia się do istotnego obniżenia możliwości plastycznych obrotów przekroju. Wzrostowi działającej siły podłużnej towarzyszy istotny spadek ciągliwość przekroju. Na rys.4 zamieszczony jest również wykres zmian współczynnika ciągliwości krzywizny  $_{\phi}$  w funkcji względnej wartości podłużnej siły ściskającej n<sub>o</sub>. Współczynnik ciągliwości krzywizny został w tym przypadku zdefiniowany jako iloraz krzywizny końcowej  $\phi_u$  odpowiadającej spadkowi nośności przekroju o 15% i krzywizny w chwili uplastycznienia przekroju  $\phi_y$ . Jak można zauważyć zmiany współczynnika ciągliwości są bardzo duże, a siły podłużne n<sub>o</sub> $\geq$ 0.3 powodują, że mamy do czynienia z tak zwanym kruchym zachowaniem przekroju.

Na rys.5 zilustrowano wpływ rozstawu strzemion, odniesionego do średnicy zbrojenia podłużnego  $s/\phi$ , na pracę przekroju zginanego poddanego działaniu siły podłużnej n<sub>o</sub>, stanowiącej 20% nośności przekroju betonowego.



Rys. 5. Wpływ rozstawu strzemion na zachowanie przekroju zginanego z udziałem siły podłużnej

Parametry analizowanego przekroju są takie same jak w przykładzie przedstawionym na rys.4. Zgodnie z oczekiwaniami zwiększanie rozstawu strzemion obniża plastyczne deformacje przekroju; im większy rozstaw strzemiona tym mniejsza krzywizna w chwili wyczerpania nośności przekroju, która ma miejsce od chwili wyboczenia prętów zbrojenia podłużnego. Na rys.5 zamieszczony jest również wykres zmian współczynnika ciągliwości krzywizny  $_{\varphi}$  w zależności od względnego rozstawu strzemion  $s/\phi$ . Współczynnik ciągliwości krzywizny rośnie z zmniejszeniem rozstawu strzemion. Jeżeli rozstaw strzemion jest większy od dziesięciu średnic zbrojenia podłużnego (s>10 $\phi$ ) to współczynnik ciągliwości krzywizny utrzymuje się na mniej więcej stałym poziomie. Takie zachowanie przekroju, charakteryzujące się nagłym spadkiem nośności (punkty SF na wykresie z rys.5) jest spowodowane tym, że w obliczeniach uwzględniona jest możliwość niesprężystego wyboczenia prętów zbrojenia podłużnego.

### 6. Uwagi końcowe

W szczególnych przypadkach konstrukcje w czasie ich użytkowania mogą pracować w stanie deformacji pokrytycznych. Niekiedy konieczne jest również sprawdzenie jak zachowają się projektowane konstrukcje i elementy konstrukcyjne w ekstremalnych warunkach, po ich uplastycznieniu.

Wymaga to zdefiniowania i wprowadzenia nowych faz pracy elementów odpowiednich do opisu stanów w nich występujących po przekroczeniu stanu granicznego nośności, a także zastosowania metod analizy, które pozwolą na określenie wielkości niezbędnych do oceny zachowania konstrukcji i elementów konstrukcyjnych w stanie deformacji pokrytycznych.

Zaproponowana metoda analizy przekroju mimośrodowo ściskanego obejmuje cały zakres deformacji tego przekroju, od zarysowania do odspojenia otuliny i wyboczenia prętów zbrojenia podłużnego. Metoda ta pozwala na ocenę wpływu podstawowych parametrów zbrojenia podłużnego i poprzecznego na zachowanie przekroju. W przypadku zbrojenia podłużnego będą to stopień zbrojenia rozciąganego, stopień zbrojenia ściskanego i średnica prętów, a w przypadku zbrojenia poprzecznego są to rozstaw strzemion, ich średnica oraz konfiguracja strzemion.

#### Literatura

- 1 Aliawdin P., Kasabutski S., Limit and shakedown analysis of RC rood cross section, Journal of Civil Engineering Management, 2009, Vol.15, No.1, 59-66.
- 2 CEB Bulletin d'Information No 242, 1988, Ductility of reinforced concrete structures.
- 3 Darwin D., Nmai Ch.K., Energy dissipation in RC beams under cyclic load, Journal of Structural Engineering, ASCE, 1985, Vol.112, No.8, s.1829-1846.
- 4 Karthik M.M., Mander J.B., Stress-block parameters for unconfined and confined concrete based on a unified stress-strain model, 2011, Journal of Structural Engineering, Vol.137, No5, 270-273.
- 5 Kent D.Ch., Park R., Flexural members with confined concrete, Journal of Structural Division, Proceedings ASCE, Vol.97, No.ST7, 1971, 1969-1990.
- 6 Korentz J., O nowej metodzie modelowania pracy przegubu plastycznego w belkach i słupach żelbetowych, 52 Konferencja Naukowa KILiW PAN i KN PZITB, Gdańsk-Krynica, 2005, t.3 Konstrukcje betonowe, 89-96.
- 7 Korentz J., Model betonu uzwojonego w elementach mimośrodowo ściskanych i zginanych, Problemy naukowo-badawcze budownictwa, t.6 Badawczo-projektowe zagadnienia w budownictwie, Białystok-Krynica, 2008, 221-228.

- 8 Korentz J., Model zależności moment-krzywizna dla belek żelbetowych ocena ciągliwości, 55KN KILiW PAN i KN PZiTB, Problemy naukowo-badawcze budownictwa, Kielce-Krynica, 2009, 231-238.
- 9 Korentz J., Niesprężyste wyboczenie prętów, model zjawiska, Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej, Budownictwo i Inżynieria Środowiska, 2012, nr 283, z.59, 101-108.
- 10 Korentz J., Metoda analizy pracy zginanego przekroju żelbetowego w stanie deformacji pokrytycznych, Budownictwo i Architektura, 2013, Vol.12, No.1, 123-130
- 11 Park R., Priestley M.J.N., Gill D., Ductility of square-confined concrete columns, Journal of the Structural Division, ASCE, 1982, Vol.108, No.ST4, s.929-950.
- 12 Pfrang E.O., Siess C.P., Sozen M.A., Load-moment-curvature characteristics of reinforced concrete cross section, ACI Journal, Proceedings, 1964, Vo.64, No,7, 763-778.
- 13 PN-EN 1992-1-1:2008, Eurokod 2: Projektowanie konstrukcji z betonu, Cz.1. Reguły ogólne i reguły dla budynków.
- 14 PN-EN 1998-1:2005 (U) Eurokod 8: Projektowanie konstrukcji poddanych oddziaływaniom sejsmicznym - Część 1: Reguły ogólne, oddziaływania sejsmiczne i reguły dla budynków.
- 15 Praca zbiorowa, Podstawy projektowania konstrukcji żelbetowych i sprężonych według Eurokodu 2, 2006, Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne.
- 16 XTRACT v3.0.8, Cross-sectional X Structural Analysis of Components, Imbsen Software System, 2007, http://www.imbsen.com

# Methods of analysis of a reinforced concrete section under bending with axial force in the post-yield range

#### Jacek Korentz

Institute of Structural Engineering, Faculty of Civil and Environmental Engineering, University of Zielona Góra, e-mail: j.korentz@ib.uz.zgora.pl

Abstract. Predicting the behaviour of plastic hinges subjected to large inelastic deformations caused by extreme loads such as earthquakes plays an important role in assessing maximum stable deformation capacities of framed concrete structures. This paper presents the analytical procedure for analysing the behaviour of a reinforced concrete section under bending with axial force in the post-yield range. The following stages of section behaviour are defined: the uncracked, first cracked, yielding, cover crushing, cover spalling, buckling of bars and limit stages. The relationship between the moment and curvature in these stages, including the effects of concrete confinement, the spalling of the concrete cover, and the inelastic buckling of the reinforcing bars, is considered. The presented method makes it possible to estimate the ductility of reinforced concrete members with various longitudinal and transverse reinforcement.

Keywords: RC section, column, bending with axial force, ductility, curvature, postyield range