Budownictwo i Architektura 13(2) (2014) 215-222

Drgania własne belki na stochastycznym dwuwarstwowym podłożu o znacznie różniących się grubościach

Barbara Kaleta[1], Bartosz Różycki[2]

[1] *Katedra Mechaniki Budowli, Wydział Budownictwa, Politechnika Opolska, e–mail: b.kaleta@po.opole.pl*

[2] *Zarząd Dróg Wojewódzkich w Opolu, e–mail: brozycki@o2.pl*

Streszczenie: W artykule analizowano wpływ zmiany modułu Younga warstw podłoża gruntowego na częstości drgań własnych układu belka-dwuwarstwowe podłoże przy założeniu, że pierwsza warstwa podłoża jest znacznie cieńsza i sztywniejsza od drugiej. Taka nietypowa sytuacja stwarza czasem szczególne trudności w geotechnice. Obliczenia przeprowadzono najpierw w ujęciu deterministycznym, a następnie stochastycznym. W analizie stochastycznej założono przestrzenną korelację modułu Younga gruntu po długości każdej z warstw przyjmując dwa stopnie korelacji, korelację pełną lub jej brak. W obliczeniach uwzględniono pełną korelację modułu Younga gruntu pomiędzy warstwami, co wynika z badań, które autorzy zamieścili we wcześniejszej pracy. Do rozwiązania stochastycznego zagadnienia własnego zastosowano metodę Monte Carlo łącznie z metodą elementów skończonych (MES). Prezentowana analiza jest kontynuacją problematyki przedstawionej w poprzednich pracach autorów.

Słowa kluczowe: zagadnienie własne, belka, dwuwarstwowe podłoże gruntowe, cienka warstwa, metoda Monte Carlo, pole losowe, metoda punktu środkowego.

1. Wstęp

Problemy statyki i dynamiki belek na sprężystym podłożu należą do ważnych zagadnień inżynierii lądowej i były przedmiotem licznych prac. Ponieważ podłoże gruntowe jest często opisane parametrami o dużym zakresie zmienności, zatem w wielu przypadkach badano mechanikę układu belka podłoże przy założeniu losowych własności podłoża (por. np. [1, 2, 3, 4]).

W pracy [5] analizowano problem zagadnienia własnego belki spoczywającej na jednowarstwowym, losowym podłożu gruntowym. W pracy tej przyjęto, że własności materiałowe belki są deterministyczne, podczas gdy parametry podłoża gruntowego mają charakter stochastyczny i należy zatem dążyć do ich opisu jako zmiennych losowych. W pracy [5] analizowano wpływ zmian współczynników zmienności modułu Younga i współczynnika Poissona na częstości drgań własnych belki, uwzględniając szczególne przypadki wzajemnej korelacji tych parametrów podłoża gruntowego.

W rzeczywistości często występują grunty uwarstwione o zróżnicowanych parametrach materiałowych. Analizę wpływu losowości modułu Younga gruntu na częstości drgań własnych belki spoczywającej na dwuwarstwowym podłożu przedstawiono w pracy [6]. Przyjęto tu układ dwóch poziomych warstw podłoża o różnych grubościach. Tym razem w miejsce opisu podłoża za pomocą zmiennych losowych wprowadzono opis przy zastosowaniu jednowymiarowego pola losowego. Badano dwa rodzaje przestrzennej korelacji modułu Younga gruntu, tj. po długości każdej z warstw i pomiędzy warstwami.

Dodatkowo w obliczeniach badano wpływ grubości warstw podłoża i ich sztywności na częstości drgań własnych belki.

Niniejsza praca jest kontynuacją problematyki przedstawionej w pracach [5, 6]. Poddano szczegółowej analizie spotykaną czasami nietypową sytuację, gdy pierwsza warstwa podłoża jest znacznie cieńsza i sztywniejsza od drugiej. Analizę drgań własnych belki spoczywającej na takim podłożu przeprowadzono najpierw w ujęciu deterministycznym, a potem stochastycznym. Do rozwiązania stochastycznego zagadnienia własnego zastosowano metodę Monte Carlo z metodą elementów skończonych (MES).

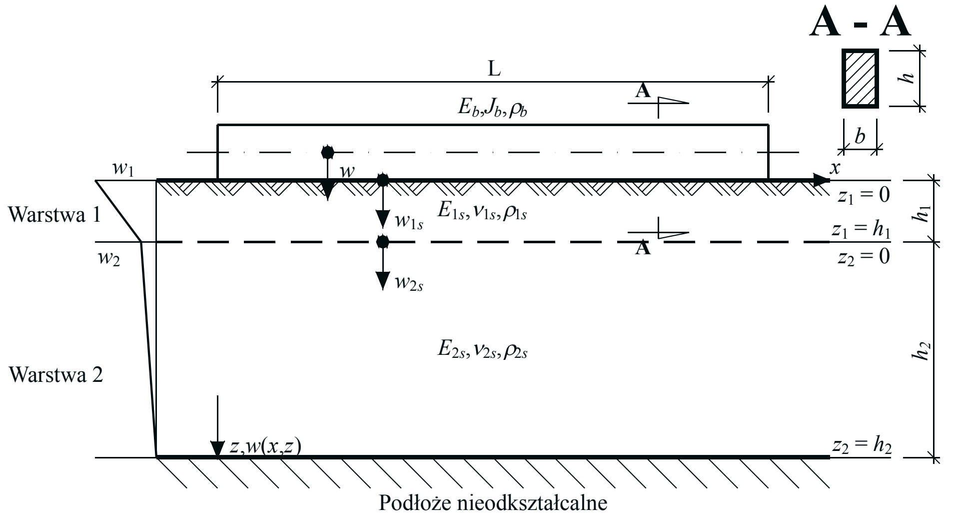
2. Sformułowanie problemu

Do rozważań przyjęto belkę typu Bernoulliego-Eulera spoczywającą na dwuwarstwowym podłożu gruntowym, którego pierwsza warstwa jest zdecydowanie cieńsza i sztywniejsza w stosunku do warstwy drugiej.

Założono model podłoża gruntowego Koláŕa-Nemeca [7], który jest uogólnieniem modelu Własowa. Przyjęty model uwzględnia dowolne uwarstwienie podłoża gruntowego i zakłada, że jego i-te warstwy traktowane są jako materiał liniowo-sprężysty o różnym module Younga E_{is}, współczynniku Poissona ν_{is}, grubości h_i i spoczywają na położonym głębiej nieodkształcalnym podłożu (bedrock). Model ten zakłada również, że przemieszczenia poziome podłoża w obu warstwach są równe zero, natomiast pionowe przemieszczenie w_{is} zmienia się liniowo wzdłuż głębokości (Rys. 1) [8], zgodnie z równaniem

$$w_{i\,s}(x, z_i) = w_i(x) f_1(z_i) + w_{i+1}(x) f_2(z_i), \quad i = 1,2, \tag{1}$$

gdzie $f_1(z_i)$ = 1-(z_1/h_1) i $f_2(z_i)$ = z_1/h_1 są przyjętymi funkcjami pionowego rozkładu przemieszczeń wewnątrz i-tej warstwy podłoża, $w_i(x)$ i $w_{i+1}(x)$ są przemieszczeniami pionowymi górnych powierzchni warstw podłoża, a z_i jest pionową, lokalną współrzędną w i-tej warstwie podłoża.



Rys. 1. Belka na dwuwarstwowym podłożu gruntowym z górną, cienką warstwą

Podstawą sformułowania zagadnienia w MES jest wyrażenie na energię odkształcenia sprężystego. Całkowita energia sprężysta układu belka-dwuwarstwowe podłoże jest sumą energii deformacji sprężystej belki Π_b i energii deformacji sprężystej każdej z warstw podłoża Π_{is}, które wyrażają się w następujący sposób [7]:

$$\Pi_b = \frac{E_b I_b}{2} \int_0^L \left[\frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right]^2 dx, \tag{2}$$

$$\Pi_{is} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^{h_i} \left[k_{is} \left(w_i(x) \frac{df_1(z)}{dz} + w_{i+1}(x) \frac{df_2(z)}{dz} \right)^2 + \frac{1}{2} t_{is} \left(\frac{dw_i(x)}{dx} f_1(z) + \frac{dw_{i+1}(x)}{dx} f_2(z) \right)^2 \right] dzdx,$$

$$k_{is} = \frac{E_{is} b(1-\nu_{is})}{(1+\nu_{is})(1-2\nu_{is})}, \quad t_{is} = \frac{E_{is} b}{2(1+\nu_{is})}, \quad i = 1,2, \tag{3}$$

gdzie $w(x)$ jest funkcją pionowego przemieszczenia belki, k_{is} i t_{is} są parametrami opisującymi pracę i-tej warstwy podłoża odpowiednio na ściskanie i ścinanie, E_b jest modułem Younga belki, I_b jest momentem bezwładności przekroju poprzecznego belki, a E_{is} i ν_{is} są odpowiednio modułem Younga i współczynnikiem Poissona i-tej warstwy podłoża gruntowego.

Belkę i dwuwarstwowe podłoże dzielimy pionowymi liniami, dokonując dyskretyzacji układu na elementy skończone składające się z elementów belkowych i elementów podłoża (Rys. 2). Sformułowanie zagadnienia własnego za pomocą metody elementów skończonych przedstawiono w pracy [6].

Szczegółowe wyrażenia określające macierze sztywności i bezwładności elementu belki i podłoża oraz ich jawne postacie przedstawiono w pracy [5].

Całkowita energia sprężysta i kinetyczna układu jest sumą energii poszczególnych elementów, tj. energii sprężystej i kinetycznej elementu belka-podłoże. Wykorzystując zasadę Hamiltona i metody dynamiki budowli [9], równanie zagadnienia własnego belki na podłożu gruntowym można zapisać w postaci [5]

$$\left(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{B}\right)\mathbf{w} = \mathbf{0}, \tag{4}$$

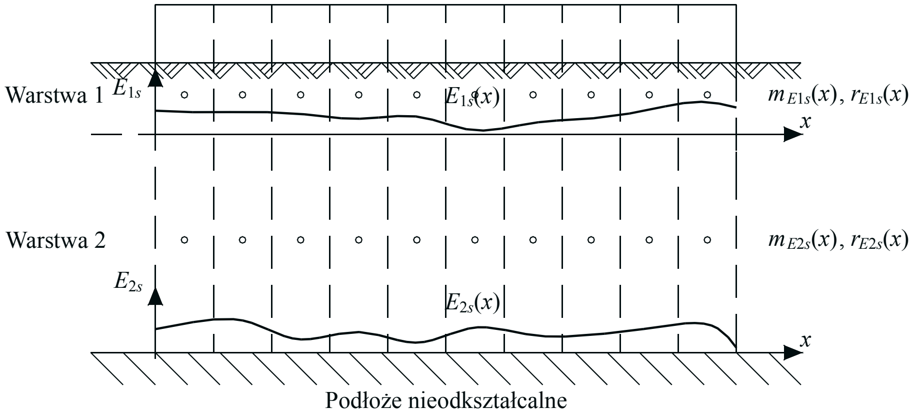
gdzie $\mathbf{K}$ jest globalną macierzą sztywności układu, $\mathbf{B}$ jest globalną macierzą bezwładności, $\mathbf{w}$ jest wektorem przemieszczeń węzłowych układu, a ω jest częstością kołową drgań własnych układu.

Rozwiązanie ogólne zagadnienia własnego (4) stanowią częstości drgań własnych ω_i i odpowiadające im wektory własne w_i.

3. Stochastyczny model podłoża dwuwarstwowego

Rozpatrzmy podłoże gruntowe przedstawione na Rys. 2. Uwarstwienie podłoża wynikające z niejednorodności gruntu powoduje, że każda z dwóch warstw ma inne parametry materiałowe. Dodatkowo zmieniają się one losowo zarówno wzdłuż długości każdej z warstw, jak i pomiędzy nimi. Wprowadzając do deterministycznego modelu podłoża Kolářa-Nemeca losowy moduł Younga E_{is} otrzymujemy stochastyczny model tego podłoża. Do jego opisu wykorzystuje się układ dwóch jednowymiarowych, jednorodnych i ciągłych pól losowych $E_{1s}(x)$ i $E_{2s}(x)$. Wówczas parametry na ściskanie i na ścinanie każdej z warstw przyjmują postacie:

$$k_{is}(x) = \frac{E_{is}(x) b \; (1-\nu_{is})}{(1+\nu_{is})(1-2\nu_{is})}, \quad t_{is}(x) = \frac{E_{is}(x) b}{2(1+\nu_{is})}, \quad i = 1,2. \tag{5}$$



Rys. 2. Stochastyczny model gruntowego podłoża dwuwarstwowego

Każde z pól losowych modułu Younga opisane jest wartościami średnimi $m_{E1s}(x)$ i $m_{E2s}(x)$ oraz współczynnikami zmienności $r_{E1s}(x)$ i $r_{E2s}(x)$. Korelację po długości takiego pola losowego opisuje się najczęściej przy pomocy ekspotencjalnej funkcji korelacji [10]

$$\rho_{Eis}(\xi_{kl}) = \exp\left(-\left(\frac{|\xi_{kl}|}{\delta}\right)^2\right), \tag{6}$$

gdzie ξ_{kl} jest odległością w przestrzeni między punktami pola losowego, a δ jest skalą korelacji pola losowego.

Natomiast korelację pomiędzy polami losowymi warstw podłoża opisuje się przy pomocy współczynnika korelacji r_{E1sE2s}.

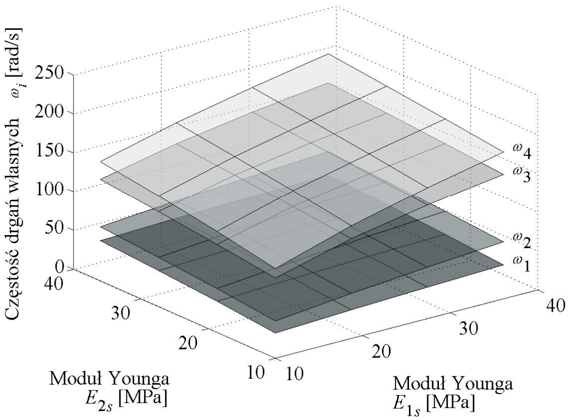
Na potrzeby metody Monte Carlo ciągłe pole losowe dyskretyzuje się przy pomocy metody punktu środkowego, w której pole losowe w danym elemencie jest reprezentowane przez pojedynczą wartość, będącą wartością tegoż pola w środku danego elementu.

4. Analiza numeryczna

Do analizy przyjęto belkę betonową o przekroju poprzecznym A_b = 0,3×0,5 m, module Younga E_b = 27 GPa, długości L = 5 m, gęstości objętościowej ρ_b = 2500 kg/m^3, spoczywającą na dwuwarstwowym podłożu, którego pierwsza warstwa jest znacznie cieńsza od drugiej. Założono grubość pierwszej warstwy h_1 = 0,5 m, a drugiej h_2 = 5,0 m (Rys.1). Gęstość objętościowa gruntu jest taka sama dla każdej warstwy i wynosi $\rho_{1s} = \rho_{2s}$ = 1700 kg/m^3. Tak samo jest w przypadku współczynników Poissona, które wynoszą $\nu_{E1s} = \nu_{E2s} = 0{,}3$.

Na początek przeprowadzono analizę numeryczną drgań własnych belki w ujęciu deterministycznym rozpatrując różne kombinacje sztywności obu warstw podłoża, dla których moduł Younga E_{is} zmieniał się w przedziale od 10 MPa do 36 MPa.

Na Rys. 3 przedstawiono zależność pierwszych czterech częstości drgań własnych belki od różnych wartości modułu sprężystości obu warstw podłoża gruntowego. Widać, że wraz ze wzrostem sztywności podłoża gruntowego rosną wartości częstości drgań własnych układu belka-dwuwarstwowe podłoże.



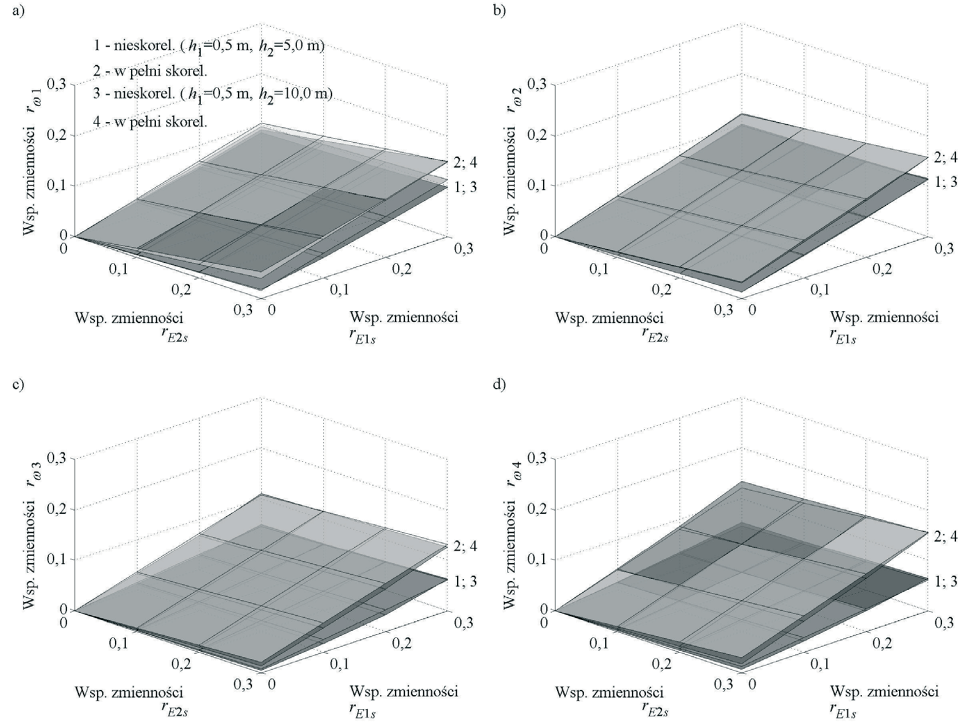
Rys. 3. Zależności wartości pierwszych czterech częstości drgań własnych belki ω_i od różnych wartości modułu Younga dwóch warstw podłoża gruntowego E_{is}

W przypadku dwóch pierwszych częstości drgań własnych większy wpływ na wartości drgań ma sztywność drugiej warstwy podłoża niż sztywność pierwszej warstwy. Wpływ ten jest około dwukrotnie większy. W przypadku trzeciej i czwartej częstości drgań większy wpływ na ich wartości (około dwa razy większy) ma sztywność pierwszej warstwy podłoża. Można to wyjaśnić postaciami drgań własnych, tzn. pierwsza i druga postać jest „gruntowa" sztywny ruch belki w podatnym podłożu, a trzecia i czwarta „belkowa" zginanie belki.

W kolejnym etapie badań przyjęto założenie, że moduł Younga podłoża gruntowego ma charakter stochastyczny i jest opisany jako jednowymiarowe pole losowe. Przeprowadzono analizę stochastycznego zagadnienia własnego układu belka-dwuwarstwowe podłoże stosując metodę Monte Carlo (por. np. [11]). Wartości średnie pól losowych każdej z warstw wynoszą odpowiednio m_{E1s} = 36 MPa i m_{E2s} = 10 MPa. Współczynniki zmienności r_{E1s} i r_{E2s} zmieniają się wzajemnie niezależnie w przedziale od 0 do 30% [12]. Przyjęto, że pola losowe modułu Younga pomiędzy warstwami są w pełni skorelowane. Wynika to z badań, które przeprowadzono w pracy [6].

Pola losowe modułu Younga wzdłuż długości warstw przyjęto jako przestrzennie nieskorelowane i w pełni skorelowane (dla $\delta \to 0$ odpowiada $r_{Eis} \to 0$ i dla $\delta \to \infty$ odpowiada $r_{Eis} \to 1$). Obliczenia przeprowadzono dla 1000 realizacji pól losowych modułów Younga warstw podłoża. Badano pierwsze cztery częstości drgań własnych belki. Dodatkowo przeprowadzono obliczenia, gdy grubość drugiej warstwy wynosi h_2 = 10,0 m. Wyniki przeprowadzonych analiz przedstawiono na Rys. 4.

Można zauważyć, że dla wszystkich analizowanych przypadków, tj. przy grubości drugiej warstwy h_2 = 5,0 m i h_2 = 10,0 m, wartości współczynników zmienności pierwszych czterech częstości drgań własnych rosną wraz ze wzrostem współczynników zmienności modułu Younga każdej z warstw podłoża. Zachodzi to zarówno dla pól losowych nieskorelowanych, jak i w pełni skorelowanych wzdłuż długości warstw. Wpływ zmiany współczynnika zmienności modułu Younga pierwszej warstwy podłoża na współczynnik zmienności wszystkich czterech częstości drgań własnych jest wyraźnie większy niż wpływ zmian współczynnika zmienności modułu Younga drugiej warstwy, niezależnie od jej grubości. W przypadku pól losowych nieskorelowanych wzdłuż długości warstwy wzrost ten jest około: cztery, siedem i dziewięć razy większy dla współczynników zmienności pierwszych trzech częstości drgań własnych. W przypadku pól losowych w pełni skorelowanych wzdłuż długości wzrost ten jest odpowiednio około jeden, trzy i sześć razy większy dla współczynników zmienności pierwszych trzech częstości drgań własnych.



Rys. 4. Zależności wartości współczynników zmienności pierwszych czterech częstości drgań własnych belki $r_{\omega i}$ od różnych wartości współczynników zmienności dwóch warstw podłoża r_{Eis}

5. Wnioski

Celem artykułu była analiza wpływu zmiany modułu Younga warstw podłoża gruntowego na częstości drgań własnych układu belka-dwuwarstwowe podłoże. Rozważono przypadki, w których pierwsza warstwa gruntu była 10-cio i 20-sto krotnie cieńsza od drugiej. Analizę drgań własnych układu przeprowadzono w ujęciu deterministycznym i stochastycznym. W ujęciu deterministycznym moduł Younga każdej z warstw zmieniał się w przedziale od 10 MPa do 36 MPa. Natomiast w przypadku losowym moduł Younga pierwszej warstwy był dużo większy od drugiej (3,6 razy). Przeprowadzając analizę stochastyczną założono przestrzenną korelację modułu Younga po długości każdej z warstw, przyjmując przy tym dwa stopnie korelacji, tj. pełną korelację i jej brak. Na podstawie przeprowadzonych badań w pracy [6] uwzględniono w obliczeniach pełną korelację pomiędzy warstwami gruntu. Stochastyczne zagadnienie własne rozwiązano przy zastosowaniu metody Monte Carlo.

Przeprowadzona analiza deterministyczna wykazała, że gdy wzrosła sztywność pierwszej warstwy z 10 MPa do 36 MPa to pierwsza częstość drgań własnych wzrosła o 35%, a druga o 53%. Natomiast jeśli o tyle samo wzrosła sztywność drugiej warstwy to pierwsza częstość drgań własnych wzrosła o 45%, a druga o 60%. Oznacza to, że większy wpływ na wartości dwóch pierwszych częstości drgań własnych ma sztywność drugiej warstwy podłoża niż sztywność pierwszej warstwy. Odwrotnie jest w przypadku trzeciej i czwartej częstości drgań własnych. Gdy wzrosła sztywność pierwszej warstwy to trzecia częstość drgań wzrosła o 56%, a czwarta częstość o 64%. Jeśli wzrosła sztywność drugiej warstwy to trzecia częstość wzrosła o 27%, a czwarta o 33%. Można uzasadnić to tym, że pierwsze dwie postacie drgań własnych obrazują ruch sztywny belki na podatnym podłożu, natomiast trzecia i czwarta przedstawia ruch, w którym dominuje zginanie belki [5].

Przeprowadzając analizę stochastyczną wykazano, że współczynnik zmienności modułu Younga pierwszej warstwy podłoża ma znacznie większy wpływ na współczynnik zmienności drgań własnych niż współczynnik zmienności modułu Younga drugiej warstwy. Na przykład dla skorelowanego pola losowego modułu Younga wzdłuż długości warstw, gdy współczynnik zmienności pierwszej warstwy wyniósł 30% to współczynnik zmienności pierwszej częstości drgań własnych wzrósł o 9%, a współczynnik zmienności czwartej częstości o 5%. W przypadku, gdy współczynnik zmienności drugiej warstwy wyniósł 30% to współczynnik zmienności pierwszej częstości drgań wzrósł tylko o 5%, a czwartej o 2%. Ma to miejsce niezależnie od tego czy grubość drugiej warstwy wynosi 5,0 m, czy też 10,0 m i to zarówno w przypadku pełnej korelacji modułu Younga gruntu wzdłuż długości warstw, jak i przy braku korelacji.

Literatura

1 Śniady P. Podstawy stochastycznej dynamiki konstrukcji. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 2000.

2 Ghanem R., Brząkała W. Stochastic finite-element analysis of soil layers. Journal of Engineering Mechanics 122 (1996) 361–369.

3 Przewłócki J., Górski J. Strip foundation on 2-D and 3-D random subsoil, Probabilistic Engineering Mechanics 16 (2000) 121–136.

4 Palczak G., Witt M. Statyczna analiza belek spoczywających na losowym dwuparametrowym podłożu sprężystym. Materiały XX Jubileuszowej Konferencji Naukowej KIL i W PAN i KN PZITB, Krynica 1974, s. 244-252.

5 Kaleta B., Zembaty Z. Eigenvalue problem of a beam on stochastic Vlasov foundation. Archives of Civil Engineering LIII (2007) 447–477.

6 Kaleta B., Różycki B. Zagadnienie własne belki na stochastycznym, dwuwarstwowym podłożu gruntowym. Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej 276 (2011) 349–356.

7 Kolář V., Nemec I. Modelling of soil structure interaction. Akademia, 1989.

8 Turhan A. A consistent Vlasov model for analysis of plates on elastic foundations using the finite element method, Ph. D. Thesis. The Graduate School of Texas Technical University, Texas, 1992.

9 Chmielewski T., Zembaty Z. Podstawy dynamiki budowli. Arkady, 1998.

10 Shinozuka M. Stochastic fields and their digital simulation, w: Stochastic Methods in Structural Dynamics. (ed. Schuëller G. I., Shinozuka M.), Martinu Nijhoff Publishers, Dordrech 1987, s. 93-133.

11 Zieliński R. Metody Monte Carlo. WNT, 1970.

12 Puła W. Zastosowanie teorii niezawodności konstrukcji do oceny bezpieczeństwa fundamentów. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, 2004.

Natural vibrations of a beam on stochastic two-layered subsoil with significantly different thickness

Barbara Kaleta[1]**, Bartosz Różycki**[2]

[1] *Department of Structural Mechanics, Faculty of Civil Engineering, The Opole University of Technology, e–mail: b.kaleta@po.opole.pl*

[2] *Voivodeship Roads Administration in Opole, e–mail: brozycki@o2.pl*

Abstract: In this paper the influence of variability of Young modulus of the subsoil layers on the natural frequency of the beam-two-layered subsoil system was analyzed. Assuming the first layer was thinner and more rigid then the second one (10 and 20 times). The calculations were made by using deterministic and stochastic approach. In the stochastic approach, the spatial correlation of Young modulus of the subsoil along the length of both layers was taken into account. Two cases of the correlation were considered, i.e. without and with full correlation. Regarding the results of the authors' research which were published in the previous article, in the calculations the full stochastic correlation of Young modulus of subsoil between both layers was taken into account. In order to solve the stochastic eigenvalue problem, Monte Carlo simulation techniques with Finite Element Method (FEM) were used. The present analysis is a continuation research demonstrated in the authors' previous papers.

Keywords: eigenvalue problem, beam, two-layered subsoil, thin layer, Monte Carlo method, random field, midpoint method.