Budownictwo i Architektura 12(3) (2013) 223-230

Kryterium zgodności wytrzymałości betonu na ściskanie opracowane na podstawie statystyk porządkowych

Elżbieta Szczygielska[1], Wiktor Tur[2]

Instytut Budownictwa, Zakład Budownictwa, Państwowa Szkoła Wyższa im. Papieża Jana Pawła II w Białej Podlaskiej, e-mail: [1] e.szczygielska@dydaktyka.pswbp.pl, [2] vvtur@bstu.by

Streszczenie: Kontrola zgodności wytrzymałości betonu na ściskanie według obowiązujących przepisów normowych PN EN 206-1:2003 jest kontrolą wyrywkową opartą na ocenie liczbowej. Spełnienie podwójnych kryteriów z uwzględnieniem przyjętego planu statystycznej kontroli jakości potwierdza zgodność badanej partii betonu z deklarowaną klasą wytrzymałości, zdefiniowaną przez wytrzymałość charakterystyczną. Zalecane według tej normy kryteria zgodności na etapie produkcji początkowej nie są pozbawione wad i są krytycznie oceniane przez wielu autorów. W artykule przedstawiono nowe kryterium zgodności oparte na statystykach porządkowych. Dokonano wstępnej oceny opracowanego kryterium dla serii o małej liczbie wyników z wykorzystaniem prawdopodobieństwa akceptacji wyznaczonego metodą Monte Carlo przy założonej stałej wadliwości 5%. Analiza wyników wykazała, że przedstawione kryterium nie zależy od dyspersji wyników a prawdopodobieństwo akceptacji utrzymuje się na stałym poziomie, zbliżonym do poziomu właściwego na etapie produkcji ciągłej.

Słowa kluczowe: beton, wytrzymałość, kryterium zgodności, statystyki porządkowe

1. Wprowadzenie

Przy budownictwie obiektów na obszarach wiejskich zwykle stosuje się niewielkie objętości betonu względnie nie wysokich klas (do C20/25), którego dostawcami mogą być małe przedsiębiorstwa produkujące beton.

Według normy PN EN 206-1:2003 [1] obowiązują podwójne kryteria zgodności wytrzymałości betonu na ściskanie, które są sformułowane z uwzględnieniem dwóch etapów produkcji, początkowej i ciągłej. Małe przedsiębiorstwa, gdzie mamy do czynienia z produkcją epizodyczną betonu, stosujące plan i częstotliwość pobierania próbek opisaną w normie PN EN 206-1:2003 [1] pozostają zwykle na etapie produkcji początkowej i mogą nie mieć możliwości przejścia na produkcję ciągłą. Jak podano w [3-6] kryteria dla produkcji początkowej są niedostatecznie uzasadnione. Produkcja betonów niewysokich klas przy spełnieniu kryteriów opisanych w przytaczanej normie może okazać się nieekonomiczna dla producenta [5].

W artykule przedstawiono nową procedurę opracowania kryterium zgodności wytrzymałości betonu na ściskanie opartą na statystykach porządkowych.

2. Kryteria oceny zgodności z uwzględnieniem planów pobierania próbek

Jak wynika z § 9.1. PN EN 206-1:2003 [1], proces kontroli produkcji (ang. production control) obejmuje szereg działań podejmowanych w celu zapewnienia kontroli jakości produkcji betonu, w tym kontrolę zgodności.

Zgodnie z koncepcją przyjętą w tej normie, producent betonu powinien ponosić odpowiedzialność za to, że materiał dostarczony na rynek odpowiada specyfikacji i spełnia określone wymagania. Jest to ogólny wymóg Dyrektywy 106/EC, zmierzający do wykluczenia dostaw materiałów niespełniających norm według przyjętych kryteriów zgodności. W pracy [2] zwrócono uwagę na paradoksalną sytuację, mającą miejsce w przypadku dostaw betonu: producent dostarczając mieszankę betonową musi zagwarantować jakość stwardniałego (w późniejszym okresie) betonu. Kompromis w tej sprawie został osiągnięty w umowie, że beton trafia na rynek z zadeklarowaną klasą wytrzymałości na ściskanie według specyfikacji a producent (dostawca) jest zobowiązany do poinformowania wykonawcy (odbiorcy) o sytuacji, kiedy w późniejszych badaniach wytrzymałości betonu zostanie stwierdzona niezgodność, aby uniknąć szkodliwych konsekwencji wykrytej niezgodności (§ 8.4. PN EN 206-1:2003 [1]). Tak więc zasady kontroli jakości betonu według EN 206-1 oparte są na koncepcji, w której to producent przeprowadza kontrolę zgodności. Niemniej jednak postanowienia normy EN 206-1 pozwalają wykonawcy (odbiorcy) na przeprowadzenie badań dostarczonego betonu według kryterium identyczności deklarowanej klasy.

Zgodnie z § 8.2.1.3. PN EN 206-1:2003 [1] potwierdzenie zgodności wytrzymałości na ściskanie uzyskuje się na próbkach badanych w 28 dniu dojrzewania. Uznaje się, że zgodność dotycząca wytrzymałości betonu na ściskanie jest potwierdzona, jeśli spełnione są jednocześnie oba kryteria, przedstawione w tabeli 1.

Tabela 1. Kryteria zgodności dotyczące wytrzymałości na ściskanie

Produkcja	Liczba „n" wyników badań wytrzymałości na ściskanie w zbiorze	Kryterium 1 Średnia z „*n*" wyników (f_{cm}) N/mm^2	Kryterium 2 Dowolny pojedynczy wynik badania (f_{ci}) N/mm^2
Początkowa	3	$\geq f_{ck} + 4$	$\geq f_{ck} - 4$
Ciągła	15	$\geq f_{ck} + 1{,}48\sigma$	$\geq f_{ck} - 4$

Uwaga. Odchylenie standardowe σ określa się na podstawie co najmniej 35 kolejnych wyników badań wykonanych w okresie dłuższym niż trzy miesiące, uzyskanych w okresie bezpośrednio poprzedzającym okres produkcji, podczas którego ma być sprawdzana zgodność

Źródło: [1]

Wielkość f_{ck} oznacza wytrzymałość charakterystyczną zdefiniowaną jako kwantyl rzędu 0,05 rozkładu wytrzymałości w populacji generalnej.

W przypadku produkcji początkowej, obowiązujące kryteria wydają się być niedostatecznie uzasadnione [3,4] a przyjęte współczynniki oceniane są krytycznie przez wielu autorów [np. 5,6]. Produkcja betonów niewysokich klas przy spełnieniu kryteriów opisanych w przytaczanej normie może okazać się nieekonomiczna dla producenta.

Do opracowania kryteriów właściwych na etapie produkcji ciągłej wykorzystano krzywe charakterystyczno-operacyjne i plany kontroli wyrywkowej. Kryteria te zostały opracowane przez Taerwe L. i obszernie opisane [np. 7].

Jak wynika z komentarzy do EN 206-1, opublikowanych w różnych źródłach [5,7-10], zasady oceny wytrzymałości betonu na ściskanie według kryteriów zgodności zostały opracowane w oparciu o przetwarzanie danych otrzymanych w wyniku komputerowo wygenerowanych losowych wartości (metoda symulacji) i analizę rzeczywistej produkcji kilku konkretnych zakładów w Europie.

3. Ocena ryzyka stosowania statystycznych kryteriów zgodności wytrzymałości betonu na ściskanie

Według autorów [5] analiza ryzyka związanego ze stosowaniem kryteriów zgodności zawartych w PN EN 206-1:2003 [1] prowadzi do następujących wniosków: w przypadku analizy małych zbiorów wyników ($n = 3$) na etapie produkcji początkowej „zalecane kryterium podwójne prowadzi do paradoksu, polegającego na zwiększaniu prawdopodobieństwa akceptacji zgodności partii betonu ze wzrostem niejednorodności wytrzymałości betonu" [5, s.25]. Zdaniem autorów [5] może to zniechęcać producentów do podejmowania działań zmierzających do zapewnienia jednorodności produkcji kosztem zwiększania wytrzymałości średniej i zwiększa ryzyko odbiorcy związane ze skutkami zakupu partii betonu o zaniżonej jakości. Z przeprowadzonych przez Wolińskiego S. i Skrzypczak I. [5] analiz wynika, że „bardzo często stosowanym sposobem zmniejszenia ryzyka dyskwalifikacji partii betonu jest zwiększenie wytrzymałości średniej zamiast redukcji jej rozrzutu. Takie postępowanie jest nieekonomiczne i nieracjonalne" [5, s.24].

Na etapie produkcji początkowej (*n = 3)* ocena średniej arytmetycznej budzi pewne kontrowersje. Co prawda kontroli podlega jeszcze minimalny wynik, ale gdy w serii danych znajdzie się wynik mniejszy od wartości wytrzymałości charakterystycznej f_{ck} o nie więcej niż 4 MPa i kryterium 1 (tab.1.) ma być spełnione, to oznacza, że w danej serii musi się też znaleźć wynik „duży", który zniweluje wpływ tego pierwszego, tak aby otrzymana średnia przekroczyła wartość f_{ck} o co najmniej 4 MPa. Sytuacja taka świadczy o zwiększaniu prawdopodobieństwa akceptacji wraz ze wzrostem dyspersji wyników. Potwierdzanie tych spostrzeżeń znajdujemy w [5], gdzie przy wykorzystaniu metody symulacji Monte Carlo autorzy poddali ocenie kryteria zgodności, wyznaczając prawdopodobieństwa akceptacji z uwzględnieniem odchylenia standardowego.

Dysproporcje uzyskanych wartości prawdopodobieństw akceptacji w zależności od odchylenia standardowego przedstawione są w tabeli 2.

Tabela 2. Prawdopodobieństwo akceptacji dla podwójnego kryterium zgodności wg PN EN 206-1:2003 przy stałej wadliwości partii *w=0,05*

Liczebność próby	Typ produkcji	Prawdopodobieństwo akceptacji dla odchylenia standardowego [MPa]				
		2	3	4	5	6
n=3	początkowa	0,267	0,707	0,863	0,917	0,939
n=15	ciągła	0,715	0,711	0,708	0,705	0,702

Źródło: [5, s.25]

Lepiej w ocenie ryzyka wypadają kryteria podwójne dla prób o liczebności 15 stosowane na etapie produkcji ciągłej. Spełniają one bowiem podstawowe warunki racjonalności kryteriów zgodności, tj. ze wzrostem liczebności próby i wzrostem jednorodności betonu następuje zwiększenie prawdopodobieństwa akceptacji zgodności wytrzymałości badanej partii betonu z wytrzymałością projektowaną.

Krytycznie do współczynników testowych przyjętych w aktualnej normie [1] odniósł się też Brunarski L. [6]. Szczególnie dotyczy to współczynnika $k = 1{,}48$ występującego w kryterium 1 dla produkcji ciągłej (tab.1) oraz dopuszczenia warunku $f_{ci,min} < f_{ck}$. Ponadto Brunarski L. podkreśla znaczenie zaleceń podanych w ISO 12491:1997 [11] dotyczących przyjmowanego poziomu ufności. Zaleca się, aby współczynnik ten był na poziomie nie mniejszym niż 0,75 i nigdy nie niższym niż 0,5. Wymagania takiego nie umieszczono w aktualnej normie [1]. Według Brunarskiego L. przy współczynniku $k = 1{,}48$ w kryterium 1 poziom ufności jest nie wyższy niż 0,3 co zwiększa ryzyko odbiorcy [6, s.59].

4. Ocena kwantyli nieznanego rozkładu z wykorzystaniem statystyk pozycyjnych

4.1. Ocena położenia kwantyli w przedziałach wyznaczonych przez wartości wytrzymałości

Głównymi problemami statystycznej kontroli jakości betonu, produkowanego w małych ilościach są: mała ilość badanych próbek (pomiarów x_i), co pociąga za sobą małą dokładność otrzymanych oszacowań oraz brak dostatecznej informacji *a priori* o przedmiocie kontroli, co z kolei nie pozwala upewnić się co do założeń dotyczących postaci rozkładu prawdopodobieństwa $F(x)$ mierzonej wytrzymałości x.

W tych warunkach stosowanie powszechnie znanych metod analizy statystycznej jest mało efektywne. Alternatywną metodą może być zastosowanie nieparametrycznych przedziałów ufności, konstruowanych w oparciu o statystyki pozycyjnych, które po pierwsze nie zależą od typu rozkładu zmiennej losowej a po drugie mają opracowane funkcjonale zastosowania [12,13].

Metoda taka jest rekomendowana w ISO 12491:1997 [11]. W rozdziale 6.6 tego dokumentu opisana jest prosta procedura oceny kwantyli oparta na statystykach porządkowych. Uzyskane pomiary $x_1, x_2, \ldots, x_n$ należy przekształcić w szereg uporządkowany $X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \ldots \leq X_{n:n}$ a następnie określić oszacowanie kwantyla X_p rzędu p jako $X_p = X_{k+1:n}$, gdzie k jest liczbą całkowitą spełniającą nierówność $k \leq np < k + 1$.

Przedstawiony dalej związek między funkcją gęstości rozkładu kwantyla, w rzeczywistości nie ma zastosowania w praktyce, ponieważ wykorzystuje funkcję gęstości prawdopodobieństwa rozkładu populacji generalnej. Jeśli chodzi o rozważaną populację, to jej parametry *a priori* są nieznane a populacja, jak wcześniej wspomniano jest hipotetyczna. W dalszej części rozdziału 6.6 sformułowane są zalecenia dotyczące oceny kwantyla nawet dla małych prób, oparte znowu na założeniu o normalności rozkładu populacji a więc nie mające żadnego związku z matematycznym narzędziem statystyk porządkowych.

Należy zauważyć, że gdy $np < 1$ oszacowaniem kwantyla zawsze będzie najmniejsza wartość w szeregu uporządkowanym, czyli $X_{1:n}$ i będzie to wartość raczej zawyżona. Kwantyl X_p prawie zawsze będzie mniejszy niż minimalna wartość w próbie. Aby żądać, że kwantyl X_p wejdzie w zakres obejmujący pomiary z prawdopodobieństwem 0,5, konieczne jest spełnienie warunku $n \geq \log 0{,}5 / \log(1-p)$. Dla typowej wartości $p = 0{,}05$ otrzymujemy $n \geq 14$. Praktyczne znaczenie ma jednak zadanie, polegające na znalezieniu przynajmniej mediany w rozkładzie położenia kwantyla na podstawie analizy znacznie mniejszych prób.

Propozycję rozwiązania tego problemu autorzy niniejszego artykułu przedstawili w [14]. Proponują użycie metody przedziałowego oszacowania kwantyli, opartej na własnościach statystyk pozycyjnych.

Niech wyniki pochodzą z populacji o nieznanej dystrybuancie F oraz w szeregu uporządkowanym nie występują rangi wiązane (tzn. rangi są liczbami całkowitymi). Wówczas:

$$P\left(X_{r:n} \leq F^{-1}(p) \leq X_{s:n}\right) = \sum_{i=r}^{s-1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \tag{1}$$

Jeśli r oraz s są wybrane w taki sposób, że:

$\sum_{i=r}^{s-1} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \geq \gamma$, to $\left(X_{r:n}, X_{s:n}\right)$ jest nieparametrycznym przedziałem ufności dla kwantyla X_p rzędu p na poziomie ufności co najmniej γ [13].

W szczególności, jeśli końce przedziałów są kolejnymi statystykami $X_{r:n}$ i $X_{r+1:n}$ to:

$$P\left(X_{r:n} \leq X_p \leq X_{r+1:n}\right) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} \tag{2}$$

Natomiast jeśli kwantyl wykroczy poza zakres wartości pomiarowych wówczas:

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_p < \mathrm{X}_{1:n}\right) = (1-\mathrm{p})^n \\ &P\left(X_p > X_{n:n}\right) = p^n. \end{aligned} \tag{3}$$

W tabeli 3 przedstawiono rozkład położenia kwantyla rzędu 0,05 dla próby o liczebności $n=6$.

Tabela 3. Rozkład położenia kwantyla rzędu 0,05 dla serii wyników $n=6$

Położenie kwantyla	poniżej $X_{1:6}$	$(X_{1:6}, X_{2:6})$	$(X_{2:6}, X_{3:6})$	$(X_{3:6}, X_{4:6})$	$(X_{4:6}, X_{5:6})$	$(X_{5:6}, X_{6:6})$	powyżej $X_{6:6}$
Prawdop. P	0,735	0,232	0,031	0,002	8,46E-05	1,78E-06	1,56E-08

Źródło: obliczenia własne

Jednostronnym nieparametrycznym przedziałem ufności dla kwantyla $X_{0,05}$ na poziomie ufności 0,735 jest przedział $(-\infty, X_{1:6})$, dla przedziału $(-\infty, X_{2:6})$ poziom ufności wynosi już co najmniej 0,95 (faktyczne prawdopodobieństwo pokrycia to 0,967).

Ponieważ mediana rozkładu położenia kwantyla znajduje się poza zakresem uporządkowanego szeregu wartości, a dokładnie poniżej minimalnego wyniku, więc powstaje problem oszacowania wartości mediany.

4.2. Oszacowanie kwantyli spoza zakresu próby empirycznej

Kwantyle niewysokich rzędów ($p \leq 0{,}05$) odpowiadają zakresowi najmniejszych możliwych, tzn. ekstremalnie niskich wartości wytrzymałości betonu (które w rzeczywistości są krytycznymi z punktu widzenia odrzucenia partii betonu). Ekstremalne rozkłady statystyczne pozwalają na dobrą aproksymację tzw. „mocnymi" prawami. Dlatego logiczne jest przyjęcie założenia, że rozkład $G(X_i)$ położenia kwantyla X_p również można aproksymować w obszarze małych x, tzn. w lewym „ogonie" rozkładu $F(x)$.

Funkcję $G(X_i)$ określającą prawdopodobieństwo tego, że kwantyl X_p nie przekroczy i-tej wartości $X_{1:n}, X_{2:n}, \ldots, X_{n:n}$ (tzn. „trafi" poniżej $X_{i:n}$ dla $i = 1$ lub między $X_{i-1:n}$ a $X_{i:n}$ dla $i > 1$) zdefiniowano jako:

$$G(X_i) = P(X_p < X_{i:n})\, dla\, i = 1, 2, \ldots, n \tag{4}$$

Wartości funkcji $G(X_i)$ obliczane są na podstawie wzorów (2) i (3).

Niech prawdopodobieństwo β_i będzie określone wzorem:

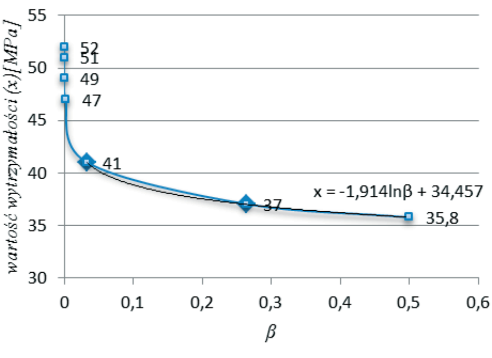
$$\beta_i = 1 - G(X_i) = P(X_{i:n} \le X_p) \tag{5}$$

Ponieważ prawdopodobieństwo „trafienia" kwantyla do zakresu wartości uporządkowanego szeregu jest niewielkie (dla $n = 6$ wynosi 0,265), więc dolne oszacowanie kwantyla rzędu p przy dość wysokim poziomie ufności $\beta = 1 - G$ (np. $\beta = 0,5$ będzie odpowiadać medianie w rozkładzie położenia kwantyla) można otrzymać za pomocą odpowiedniej ekstrapolacji otrzymanej zależności.

Dolne oszacowanie mediany w rozkładzie położenia kwantyla można otrzymać na podstawie dwóch najmniejszych wartości w serii wyników przy pomocy prostej ekstrapolacji logarytmicznej:

$$\hat{X}_{p;\beta} = \hat{a}_1 \ln \beta + a_2 \text{ przyjmując } \beta = 0,5\,. \tag{6}$$

Na rysunku 1 przedstawiono zależność parametru x określającego wytrzymałość betonu od prawdopodobieństwa β_i otrzymaną dla następujących przykładowych wyników pomiaru wytrzymałości 6 próbek betonu: 41, 52, 37, 49, 47 i 51 MPa wraz z dolnym oszacowaniem mediany rozkładu na poziomie 35,8 MPa.



Rys. 1. Wykorzystanie rozkładu prawdopodobieństwa β kwantyla X_p rzędu $p=0,05$ do dolnego oszacowania mediany metodą ekstrapolacji logarytmicznej

Warto zauważyć, że w prezentowanej metodzie ekstrapolacji nie brano pod uwagę największych wartości wytrzymałości, a tylko dwie najmniejsze. Fakt ten oznacza, że na położenia kwantyla niskiego rzędu decydujący wpływ ma tylko lewa część rozkładu $F(x)$ mierzonego parametru x. Natomiast powszechnie stosowane metody przedziałowego oszacowania kwantyli oparte są na miarach klasycznych (średniej, wariancji), które to zależą od wszystkich wartości występujących w próbie.

Postępując zgodnie z metodami estymacji przedziałowej kwantyli według ISO 12491:1997 [11], w przypadku określenia wartości charakterystycznych wytrzymałości konstrukcyjnych materiałów budowlanych dolna granica przedziału ufności kwantyla rozkładu normalnego rzędu p wynosi: $X_{p,est} = x_{śr} - k_n s$. Dla podanych wyżej przykładowych danych otrzymujemy średnią ($x_{śr}$) na poziomie 46,17 MPa z odchyleniem standardowym (*s*) 5,95 MPa. Odczytany z tablic [6, s.75] współczynnik $k_n = 1,75$ dla $n = 6$ i $\gamma = 0,5$ pozwala wyznaczyć dolną granicę przedziału ufności kwantyla na poziomie około 35,8 MPa. Wynik ten jest zgodny z otrzymaną wartością nieparametrycznego oszacowania, jednakże na jego wartość mają wpływ zmiany wyników w „górnej" części szeregu. Na przykład wzrost tych wartości spowoduje wzrost dyspersji i obniży wartość oszacowania kwantyla. Najwyraźniej efekt ten można wyeliminować, jeśli obliczenia oparte będą na statystykach pozycyjnych a dyspersja będzie oceniana tylko w „lewej" części uporządkowanego szeregu.

5. Kryterium zgodności opracowane w oparciu o statystyki porządkowe

Kryterium zgodności wytrzymałości betonu na ściskanie opracowane w oparciu o statystyki porządkowe dla liczby wyników w serii $n < 14$ ma postać:

$$kf_{c1} + (1-k) f_{c2} \geq f_{ck} \tag{7}$$

gdzie f_{ck} oznacza wytrzymałość charakterystyczną betonu, $f_{c1} = X_{1:n}$ oraz $f_{c2} = X_{2:n}$ oznaczają dwie najmniejsze wartości w uporządkowanej serii wyników takie, że $f_{c1} < f_{c2}$

Współczynnik *k* zależy od liczby wyników w serii (*n*) i przyjmuje wartości przedstawione w tabeli 4.

Tabela 4. Wartości współczynnika *k* w zależności od liczby wyników w serii *n*

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
k	1,421	1,384	1,344	1,304	1,264	1,223	1,183	1,143	1,103	1,062	1,021	0,980	0,938

Źródło: obliczenia własne

Lewa strona w nierówności (7) jest oszacowaniem wartości kwantyla rzędu $p = 0,05$ w rozkładzie wyników w populacji. Znajdując oszacowanie kwantyla przyjęto ekstrapolację logarytmiczną:

$$\tilde{X}_{0,05;\beta} = \hat{a}_1 \ln \beta + \hat{a}_2 \tag{8}$$

gdzie:

$$\hat{a}_1 = \frac{f_{c1} - f_{c2}}{\ln \frac{\beta_1}{\beta_2}}; \quad \hat{a}_2 = \frac{f_{c2} \ln \beta_1 - f_{c1} \ln \beta_2}{\ln \frac{\beta_1}{\beta_2}}; \quad \beta_i = 1 - G(X_i) \text{ dla } i = 1,2.$$

Po przekształceniach (8) kładąc $k = \dfrac{\ln \frac{0,5}{\beta_2}}{\ln \frac{\beta_1}{\beta_2}}$ otrzymano żądane oszacowanie:

$$\tilde{X}_{0,05;0,5} = kf_{c1} + (1-k) f_{c2} \tag{9}$$

Analizując wartości współczynnika *k* zawarte w tabeli 5, można zauważyć, że oszacowanie kwantyla rzędu 0,05 dla $n < 14$ znajduję się poniżej najmniejszego wyniku $f_{c,min}$, co oznacza, że zgodność nie zostanie potwierdzona gdy $f_{c,min} < f_{ck}$.

Dla $n \geq 14$ oszacowanie kwantyla położone jest w przedziale $(X_{1:n}, X_{2:n})$, czyli kryterium może potwierdzić zgodność wytrzymałości charakterystycznej nawet jeśli $f_{c,min} < f_{ck}$.

Sformułowane nowe kryterium zgodności (7) dla małych prób poddano ocenie, obliczając prawdopodobieństwo akceptacji. Wykorzystano w tym celu metodę symulacji Monte Carlo. W oparciu o metodę [15] wygenerowano po 100 000 serii liczb losowych o liczebności $n = 3$ zgodnych ze standardowym rozkładem normalnym. Przyjmując jako model beton klasy C25/30 i założoną stałą wadliwość partii $w = 0,05$ oraz zmienne odchylenie standardowe ($\sigma = 2, 3, 4, 5$ *i* 6 *MPa*), otrzymano 5 różnych rozkładów. Przy ustalonej frakcji wad obliczono prawdopodobieństwa akceptacji dla podwójnego kryterium zgodności wg normy EN 206-1 w postaci $f_{cm} \geq f_{ck} + 4$ i $f_{c,min} \geq f_{ck} - 4$ oraz kryterium opisanego warunkiem (7). Wyniki obliczeń przedstawiono w tabeli 5.

Tabela 5. Prawdopodobieństwo akceptacji dla kryterium zgodności przy stałej wadliwości partii $w=0,05$ i liczebności próbek $n=3$

Kryterium	Prawdopodobieństwo akceptacji dla odchylenia standardowego [MPa]				
	2	3	4	5	6
PN EN206-1	0,2693	0,7049	0,8651	0,9264	0,9372
Nowe kryterium	0,7053	0,7047	0,7053	0,7050	0,7053

Źródło: obliczenia własne

W przypadku oceny kryterium zgodności wg PN EN 206-1 otrzymano wartości prawdopodobieństw akceptacji bardzo zbliżone do wyników, jakie przedstawili Woliński S. i Skrzypczak I. w [5] (por. tab.2).

Analizując wartości prawdopodobieństw akceptacji otrzymanych dla zaproponowanego kryterium zgodności można zauważyć, że prawdopodobieństwo akceptacji utrzymuje się na stałym poziomie około 0,705 i nie zależy od odchylenia standardowego. Ponadto uzyskane wartości są zbliżone do prawdopodobieństw akceptacji wyznaczonych dla produkcji ciągłej wg PN EN 206-1 (por. tab.2).

Porównanie wyników przeprowadzonych analiz pozwala stwierdzić, że zaproponowane kryterium zgodności wypadło w ocenie lepiej, niż obecnie obowiązujące. Nie ma ono bowiem tej wady co kryterium przedstawione w PN EN 206-1, tzn. ze wzrostem rozrzutu nie wzrasta prawdopodobieństwo akceptacji, a wręcz utrzymuje się na stałym poziomie.

Dodatkową zaletą przedstawionego kryterium jest to, że przy ocenie zgodności nie wymaga się znajomości typu rozkładu w populacji i kontrolowania odchylenia standardowego.

6. Podsumowanie

Wstępna weryfikacja przedstawionej w artykule metody oszacowania kwantyli oraz kryterium zgodności opartego na statystykach pozycyjnych pozwala na sformułowanie następujących wniosków:

1. Oszacowanie wytrzymałości charakterystycznej otrzymane metodą statystyk porządkowych nie wymaga znajomości *a priori* rozkładu wytrzymałości w populacji generalnej.
2. Oszacowanie kwantyla rzędu 0,05 w rozkładzie wytrzymałości otrzymane metodą statystyk porządkowych nie zależy od wszystkich wyników w serii a na jego wartość mają wpływ tylko dwa najmniejsze wyniki.
3. Prawdopodobieństwo akceptacji dla podwójnego kryterium dla serii o liczebności $n = 3$ przy wadliwości 5% utrzymuje się na stałym poziomie około 0,705 i nie zależy od dyspersji wytrzymałości.
4. Wartości prawdopodobieństw akceptacji dla kryterium zgodności dla serii o liczebności $n = 3$ wyznaczone przy stałej wadliwości 5% są zbliżone do prawdopodobieństw akceptacji wyznaczonych dla produkcji ciągłej wg PN EN 206-1:2003 [1].

Przedstawione w artykule kryterium zgodności oparte na statystykach porządkowych wymaga jeszcze sprawdzenia pod wieloma względami (np. porównanie krzywych OC dla różnych liczności próbek, różnych rozkładów itp.).

Literatura

1 PN EN 206-1:2003. Beton – Część 1: Wymagania, właściwości, produkcja i zgodność.
2 Tur W., Derechennik S. Kryteria ocenki sootwietstwia procznosti betona w podchodach europejskich i amerikanskich standartow. Wiestnik BrGTU 1(2012) 173–178.
3 Beal A.N. Concrete strength testing - are the code writers getting it right? The Structural Engineer 87 (10) (2009) 73.

4 Beal A.N. Concrete Cube Strength - what use are Statistics? ICE Proc. Part 2, December (1981) 1037–1048.
5 Woliński S., Skrzypczak I. Kryteria statystyczne zgodności wytrzymałości betonu na ściskanie. Materiały Budowlane 2 (2006) 20–25.
6 Brunarski L. Podstawy matematyczne kształtowania kryteriów zgodności wytrzymałości materiałów, ITB, 2009.
7 Taerwe L. Analysis and modeling of autocorrelation in concrete strength series, w: Proceeding 4th International Probabilistic Symposium, 12–13 October 2006. (ed. Proske D., Mehdianpours M.) Berlin, Germany 2006, s. 57–70.
8 Caspeele R., Taerwe L. Variance reducing capacity of concrete conformity control in structural reliability analysis under parameter uncertainties, w: Application of Statistics and Probability in Civil Engineering. (ed. Faber, Kohler) 2011, s. 2509–2516.
9 Blaut H. Sampling inspection plan and operating characteristics for concrete (1977). Deutscher ausschuss für stahlbeton (233),1973.
10 Caspeele R. Probabilistic Evaluation of Conformity Control and the Use of Bayesian Updating Techniques in the Framework of Safety Analysis of Concrete Structures. PhD thesis, Ghent University, Ghent, Belgium 2010, s. 129
11 ISO 12491:1997 Statistical methods for quality control of building materials and components. European Standard, CEN.
12 Dawid G. Poriadkowyje statistiki. Nauka, 1979.
13 Kendall M. Stewart A. Statisticzeskie wywody I swiazi . Nauka, 1973.
14 Tur W., Derechennik S., Szczygielska E. Niekotoryje problemy ocenki sootwietstwia procznosti betona soglasno normy EN 206-1:2000, w: Problemy sovremennowo betona i żelezobetona. (ed. Markowski M.) Mińsk 2011.
15 Taerwe, L. Evaluation of compound compliance criteria for concrete strength. Materials and Structures 21(1) (1988)13-20.

The study of the conformity criterion for compressive strength of concrete based on order statistics

Elżbieta Szczygielska[1], Wiktor Tur[2]

Institute of Civil Engineering, Department of Civil Engineering, Pope John Paul II State School of Higher Education in Biała Podlaska, e-mail: [1] e.szczygielska@dydaktyka.pswbp.pl, [2] vvtur@bstu.by

Abstract: The test of concrete compressive strength conformity with current regulations PN EN 206-1:2003 is the sampling inspection based on a numerical evaluation. Satisfying the compound criteria, including the adoption of statistical quality control plan, confirms the conformity of the examined batch of concrete defined by the declared class of compressive strength defined by characteristic value of compressive strength. The conformity criteria recommended by EN 206-1 for the initial production are not without flaws and they are critically evaluated by many authors. This paper presents a new criterion of conformity based on order statistics. A preliminary evaluation of the criterion was made for the series with a small number of the test results with the use of probability of acceptance determined by means of the Monte Carlo method with the assumed 5% fraction defective. The analysis of the results showed that the presented criterion does not depend on the dispersion of results whereas the probability of acceptance is maintained at a constant level approached to the appropriate one at the stage of continuous production.

Keywords: concrete, compressive strength, conformity criterion, order statistics.