

# Ocena niepewności modeli nośności elementów żelbetowych

Szczepan Woliński<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Katedra Konstrukcji Budowlanych, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Politechnika Rzeszowska, e-mail: szwolkkb@prz.edu.pl*

**Streszczenie:** W pracy przedstawiono analizę i sposoby oceny niepewności modelowej nośności elementów żelbetowych. Sposób pierwszy opiera się na normowej procedurze kalibracji modeli nośności. Sposób drugi jest autorską propozycją oszacowania niepewności modelowej z wykorzystaniem dostępnych wyników badań doświadczalnych dotyczących zmienności nośności. Zgodnie z koncepcją metody częściowych współczynników jako miarę niepewności modelowej przyjęto wartość odpowiedniego współczynnika częściowego. Rozważania i propozycje przedstawione w pracy zilustrowano przykładem oceny niepewności modelu nośności na ścinanie strefy przypodporowej belki żelbetowej.

**Słowa kluczowe:** nośność elementów żelbetowych, niepewność parametryczna, niepewność modelowa, współczynniki częściowe, ocena niepewności modelowej.

## 1. Wprowadzenie

Zmienne i parametry występujące w modelach nośności elementów żelbetowych są w różnym stopniu obciążone niepewnością. We współczesnych normach i literaturze przedmiotu wszystkie niepewności uwzględniane w procesie projektowania i oceny stanu konstrukcji są traktowane jako niepewności losowe i analizowane metodami probabilistycznymi [1, 2, 3]. Tradycyjnie uwzględnia się trzy rodzaje niepewności zmiennych stanu konstrukcji: fizyczną, statystyczną i modelową. Pogłębiona analiza wskazuje jednak, że probabilistyczny opis niepewności jest w wielu sytuacjach nieuzasadniony. W teorii systemów rozróżnia się dwa podstawowe rodzaje niepewności; parametryczną i systemową. O ile opis probabilistyczny jest uzasadniony w odniesieniu do niepewności fizycznej i statystycznej, to ocena niepewności modelowej związanej z poprawnością i stopniem dopasowania modelu do rzeczywistej odpowiedzi fizycznego obiektu na oddziaływania, wymaga zastosowania opisanego na bardziej ogólnych założeniach, przede wszystkim odrzucenia logiki dwuwartościowej [4, 5]. We współczesnych normach i publikacjach stosuje się jednak powszechnie probabilistyczny opis wszystkich rodzajów niepewności.

Ocena niepewności modelu nośności może być oparta na porównaniu wyników obliczeń i badań doświadczalnych umożliwiającym globalną ocenę niepewności, która jest kombinacją niepewności fizycznej i statystycznej związanej z parametrami modelu oraz niepewności modelowej. Inna metoda polega na wykorzystaniu opinii ekspertów. Podejmowane są również próby oceny niepewności modelu nośności na podstawie analizy modeli analitycznych i numerycznych o różnym stopniu komplikacji [6].

W Załączniku D do normy PN-EN 1990 [1] zamieszczono wskazówki i wybrane procedury dotyczące redukcji niepewności uwzględnionych w projektowaniu konstrukcji na podstawie uzupełniających badań doświadczalnych. Zalecane procedury są oparte na podejściu probabilistycznym, niekiedy z wykorzystaniem procedur Bayesa. Podstawowe informacje na temat zastosowania procedur Bayesa do modyfikacji wyników normowych ocen nośności i jakości elementów budowlanych zamieszczono w normie ISO 12491 [7].

Nośność elementów i konstrukcji żelbetowych jest obliczana za pomocą modeli zalecanych w aktualnych normach projektowania, których wiarygodność jest zróżnicowana i trudna do oszacowania. Brak również jednoznacznej odpowiedzi na pytanie czy bardziej skomplikowane modele nośności, w tym numeryczne, umożliwiają projektowanie konstrukcji o większej niezawodności niż proste modele empiryczne. Formalnie, wiarygodność modelu zależy zarówno od niepewności parametrycznej, jak i modelowej.

Niepewność parametryczna jest związana ze zmiennymi stanu konstrukcji i warunkami brzegowymi, natomiast niepewność modelowa wynika z założeń i uproszczeń przyjętych w opisie odpowiedzi konstrukcji na oddziaływanie oraz dyskretyzacji i aproksymacji związanych z modelowaniem numerycznym. Porównanie wyników obliczeń wykonanych na podstawie przyjętego modelu z wynikami badań doświadczalnych ułatwia oszacowanie globalnej niepewności modelu. Podział niepewności globalnej na parametryczną i modelową jest dość trudny i kosztowny, wymagający zgromadzenia zbiorów wyników badań o dużej liczebności.

Ocena niepewności modeli nośności zależy od postaci modelu i przyjętego sposobu oceny niepewności. Niepewność modeli deterministycznych szacuje się najczęściej globalnie za pomocą apriorycznych, jakościowych ocen eksperckich przyjmując za jej miarę współczynniki bezpieczeństwa o wartościach ustalanych na podstawie dobrej praktyki inżynierskiej. Miary niezawodności w postaci częściowych współczynników, stosowane w aktualnych normach, umożliwiają dekompozycję miar niepewności globalnej modeli nośności oraz statystyczny opis niepewności parametrycznej zmiennych stanu i oszacowanie niepewności modelowej jako różnicy niepewności globalnej i parametrycznej.

W pracy przedstawiono dwa sposoby oceny niepewności modeli nośności elementów żelbetowych; pierwszy oparty na podejściu zalecanym w Eurokodach oraz drugi, który jest propozycją autorską. Rozważania i analizy prezentowane w pracy zilustrowano przykładem oceny niepewności modelu nośności na ścinanie strefy przypodporowej belki żelbetowej.

## 2. Ocena niepewności modeli nośności z wykorzystaniem procedury normowej

W celu oceny niepewności globalnej modeli nośności lub efektów oddziaływań można wykorzystać dwie procedury kalibracji modeli nośności, czyli określenia ich wartości charakterystycznych i obliczeniowych na podstawie badań doświadczalnych oraz informacji *a priori*, zamieszczone w Załączniku D do normy PN-EN 1990 [1]. Według pierwszej procedury szacuje się wartości charakterystyczne, a według drugiej wartości obliczeniowe nośności.

W obu procedurach przyjęto następujące założenia:

- funkcja nośności jest funkcją wielu zmiennych losowych  $\underline{X}$ ,
- zbiór dostępnych wyników badań jest wystarczająco liczny,
- uwzględniono i zmierzono wszystkie właściwości materiałowe i geometryczne, które mają istotny wpływ na nośność,
- zmienne losowe uwzględnione w funkcji nośności są statystycznie niezależne,
- wszystkie zmienne losowe mają normalne lub log-normalne rozkłady.

Rozważane procedury obejmują następujące wspólne kroki:

- ustalenie matematycznego modelu obliczeniowego nośności teoretycznej elementu:

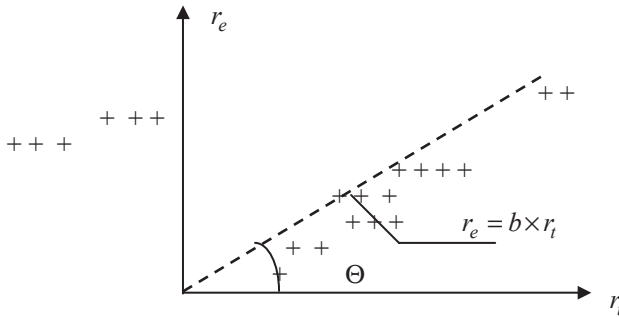
$$r_i = g_{ri}(\underline{X}) \quad (1)$$

- porównanie wartości obliczonych według modelu teoretycznego  $r_{ti}$  z doświadczalnymi  $r_{ei}$ . Punkty przedstawiające pary wartości  $(r_{ti}, r_{ei})$  powinny się układać na linii prostej nachylonej pod kątem  $\theta = \pi/4$ , wykazując pewien rozrzut (Rys.1). Systematyczne odchylenia od linii prostej oznaczają, że wystąpiły błędy w procedurach badawczych lub/i, że przyjęto nieadekwatną postać funkcji nośności,
- przedstawienie modelu probabilistycznego nośności z uwzględnieniem błędu  $\delta$ , w postaci:

$$r = br_i\delta, \quad b = \sum_{i=1}^n r_{ei}r_{ti} : \sum_{i=1}^n r_{ti}^2 \quad (2)$$

- obliczenie wartości średniej teoretycznej funkcji nośności  $r_m$ , dla średnich wartości zmiennych losowych  $\underline{X}_m$  można obliczyć według wzoru:

$$r_m = br_t(\underline{X}_m)\delta = bg_{rt}(\underline{X}_m)\delta \quad (3)$$

Rys. 1. Wykres zależności  $r_e - r_t$ 

- oszacować współczynnik zmienności błędów  $v_\delta$  na podstawie wyników badań  $r_{ei}$  oraz wyników obliczeń  $r_{ti}$ , za pomocą następujących wzorów:

$$v_\delta = \sqrt{\exp(s_\Delta^2) - 1} \quad (4)$$

$$\text{gdzie: } \delta_i = \frac{r_{ei}}{br_{ti}}, \quad \Delta_i = \ln(\delta_i), \quad \bar{\Delta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta_i, \quad s_\Delta^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\Delta_i - \bar{\Delta})^2$$

- oszacować zgodność populacji doświadczalnej z wynikami uzyskanymi na podstawie przyjętej obliczeniowej funkcji nośności z ewentualną redukcją rozrzutu wyników doświadczalnych i obliczonych,
- określić wartość współczynnika zmienności zmiennych podstawowych  $v_{X_i}$ ,
- obliczyć wartość charakterystyczną nośności  $r_k$  według jednego z trzech sposobów:

1. jeśli funkcja nośności ma postać iloczynu  $j$  zmiennych podstawowych w postaci:

$$r = br_t\delta = b(X_1 \times X_2 \times \dots \times X_j)\delta \quad (5)$$

to wartość średnia  $E(r)$  może być obliczona z wzoru:

$$E(r) = b\{E(X_1) \times E(X_2) \times \dots \times E(X_j)\} = bg_{rt}(\underline{X}_m) \quad (6)$$

a współczynnik zmienności  $v_r$  można obliczyć według wzoru:

$$v_r^2 = (v_\delta^2 + 1) \left[ \prod_{i=1}^j (v_{X_i}^2 + 1) \right] - 1 \quad (7)$$

2. alternatywnie, dla małych wartości  $v_\delta^2$  i  $v_{X_i}^2$  wartość  $v_r^2$  można obliczyć według uproszczonego wzoru:

$$v_r^2 = v_\delta^2 + v_{rt}^2, \quad v_{rt}^2 = \sum_{i=1}^j v_{X_i}^2 \quad (8)$$

3. jeśli funkcja nośności ma bardziej złożoną postać:

$$r = br_t = bg_{rt}(X_1, X_2, \dots, X_j)\delta \quad (9)$$

to wartość średnią  $E(r)$  można obliczyć według wzoru:

$$E(r) = bg_{rt}[E(X_1), E(X_2), \dots, E(X_j)] = bg_{rt}(\underline{X}_m) \quad (10)$$

a wartość  $v_{rt}$ :

$$v_{rt}^2 = \frac{VAR[g_{rt}(\underline{X})]}{g_{rt}^2(\underline{X}_m)} \equiv \frac{1}{g_{rt}^2(\underline{X}_m)} \sum_{i=1}^j \left( \frac{\partial g_{rt}}{\partial X_i} \sigma_i \right)^2 \quad (11)$$

gdzie:  $VAR[...]$  – wariancja zmiennej w nawiasie,  $\sigma_i$  – odchylenie standardowe  $X_i$ .

Uwaga: jeśli liczba wyników badań doświadczalnych  $n$  jest mniejsza niż 100, zaleca się wprowadzić poprawkę w rozkładzie zmiennej  $\Delta = \ln(\delta)$  z uwagi na niepewność statystyczną a rozkład zmiennej  $\Delta$  zaleca się uważać za rozkład t – centralny o parametrach:  $\Delta, v_{\Delta}, n$ ,

- w metodzie pierwszej należy następnie obliczyć wartość charakterystyczną nośności  $r_k$  na podstawie wzoru:

$$r_k = bg_{rt}(\underline{X}_m) \exp(-k_{\infty} \alpha_{rt} Q_{rt} - k_n \alpha_{\delta} Q_{\delta} - 0,5Q^2) \quad (12)$$

$$Q_{rt} = \sigma_{\ln(rt)} = \sqrt{\ln(v_{rt}^2 + 1)}, \quad Q_{\delta} = \sigma_{\ln(\delta)} = \sqrt{\ln(v_{\delta}^2 + 1)} \quad (13)$$

$$Q = \sigma_{\ln(r)} = \sqrt{\ln(v_r^2 + 1)} \quad (14)$$

$$\alpha_{rt} = \frac{Q_{rt}}{Q}, \quad \alpha_{\delta} = \frac{Q_{\delta}}{Q} \quad (15)$$

gdzie:  $k_n$  - współczynnik tolerancji dla 5% wartości charakterystycznej (5% kwantyla), dla liczebności próby  $n$  i nieznannej wartości  $v_X$ ;  $k_{\infty}$  - wartość  $k_n$  dla  $n \rightarrow \infty$  ( $k_{\infty} = 1,64$ );  $\alpha_{rt}$  - współczynnik wagi dla  $Q_{rt}$ ;  $\alpha_{\delta}$  - współczynnik wagi dla  $Q_{\delta}$  (wartość  $v_{\delta}$  estymuje się na podstawie rozważanej próby).

Jeśli liczba wyników badań doświadczalnych jest nie mniejsza niż 100, wartość nośności charakterystycznej można oszacować według wzoru:

$$r_k = bg_{rt}(\underline{X}_m) \exp(-k_{\infty} Q - 0,5Q^2) \quad (16)$$

- w metodzie drugiej szacuje się bezpośrednio wartość obliczeniową nośności  $r_d$ , którą określa się bezpośrednio:

1. w przypadku ograniczonej liczby wyników badań  $n$ :

$$r_d = bg_{rt}(\underline{X}_m) \exp(-k_{d,\infty} \alpha_{rt} Q_{rt} - k_{d,n} \alpha_{\delta} Q_{\delta} - 0,5Q^2) \quad (17)$$

gdzie:  $k_{d,n}$  - współczynnik charakterystycznego kwantyla dla przypadku „ $v_X$  nieznane”;  $k_{d,\infty}$  - wartość współczynnika  $k_{d,n}$  dla  $n \rightarrow \infty$  ( $k_{d,\infty} = \alpha_R \beta = 0,8 \times 3,80 = 3,04$ ; tzn. dla współczynnika wrażliwości wg metody FORM  $\alpha_R = 0,8$  i wskaźnika niezawodności  $\beta = 3,8$  dla konstrukcji i elementów konstrukcyjnych klasy niezawodności RC2 oraz okresu odniesienia  $T=50$  lat, tzn. jak dla kwantyla rzędu około 0,1%, a wartość  $v_R$  należy obliczyć na podstawie rozpatrywanej próby).

2. w przypadku dużej liczby wyników badań, wartość obliczeniową można obliczyć według wzoru:

$$r_d = bg_{rt}(\underline{X}_m) \exp(-k_{d,\infty} Q - 0,5Q^2) \quad (18)$$

Znając wartość charakterystyczną i obliczeniową nośności można obliczyć częściowy współczynnik, który jest miarą niepewności przyjętego modelu nośności:

$$\gamma_{Rd} = r_k / r_d \quad (19)$$

### 3. Uproszczona ocena niepewności modeli nośności

W normie PN-EN 1990 [1] zamieszczono uwagę, że nośność obliczeniową elementów lub konstrukcji obliczanych metodami nieliniowymi i zawierających więcej niż

jeden materiał można wyrazić jako:

$$r_d = \frac{1}{\gamma_{M,1}} r \left\{ \eta_1 X_{k,1}; \eta_i X_{k,i(i>1)} \frac{\gamma_{m,1}}{\gamma_{m,i}}; a_d \right\} \quad (20)$$

gdzie  $\gamma_{M,1}$  - współczynnik częściowy dla materiału „wiodącego” uwzględniający niepewności modelu,  $\eta_i$  - współczynnik konwersji dla i-tego materiału,  $\gamma_{m,i}$  - współczynnik materiałowy dla i-tego materiału,  $a_d$  - wartość obliczeniowa wielkości geometrycznej.

Autorską procedurę oszacowania wartości obliczeniowej nośności elementu lub konstrukcji z zastosowaniem analizy nieliniowej przedstawiono w pracy [8]. Można ją streścić w następujących punktach:

- obliczyć wartość średniej nośności konstrukcji  $r_m$  dla przyjętego scenariusza obciążenia, przyjmując średnie wartości właściwości betonu  $f_{cm}$ ,  $f_{ctm}$ ,  $E_{cm}$ , i stali zbrojeniowej  $f_{ym}$ ,  $E_s$ ,
- oszacować globalny współczynnik nośności  $\gamma_R$  jako stosunek wartości średniej do wartości obliczeniowej nośności  $\gamma_R = r_m / r_d$ ,
- wartość współczynnika  $\gamma_R$  można również obliczyć jako iloczyn dwóch współczynników:  $\gamma_1$ , którego wartość można oszacować z definicji nośności charakterystycznej  $r_k$  jako kwantyl rzędu 5% nośności oraz współczynnika niepewności modelu  $\gamma_{Rd}$  zdefiniowanego jako stosunek wartości charakterystycznej do wartości obliczeniowej nośności:

$$\gamma_R = \gamma_1 \times \gamma_{Rd}, \quad \gamma_1 = 1 / (1 - 1,64v_R) \quad (21)$$

$$\gamma_{Rd} = r_k / r_d = \gamma_R / \gamma_1 \quad (22)$$

Wartość obliczeniową nośności należy wyznaczyć z zależności (20) dla współczynnika zmienności nośności żelbetowych elementów konstrukcyjnych  $v_R$  określonego na podstawie wyników badań doświadczalnych (w tym opublikowanych w literaturze przedmiotu), a w przypadku konstrukcji złożonych z  $n$  elementów o znanych wartościach  $v_{R,i}$ , jego wartość należy oszacować z uwzględnieniem struktury niezawodnościowej konstrukcji.

Inny, przybliżony sposób oszacowania wartości współczynnika  $\gamma_{Rd}$  na podstawie wzoru (20) wymaga ustalenia „wiodącego” materiału konstrukcyjnego (w przypadku konstrukcji żelbetowych jest to z reguły stal zbrojeniowa), oraz określenia proporcji wpływu zbrojenia i betonu na nośność:

$$\gamma_2 = \gamma_s \alpha (\gamma_c / \gamma_s) \quad (23)$$

W przypadku konstrukcji złożonej z wielu elementów można oszacować wartość obliczeniową nośności konstrukcji  $R_d = \gamma_R \times R_m = \gamma_1 \times \gamma_{Rd} \times R_m$ , uwzględniając fakt, że jest to zazwyczaj ocena przedziałowa i konkretną wartość globalnego współczynnika nośności  $\gamma_R$  należy ustalić uwzględniając klasę niezawodności konstrukcji, doświadczenie i intuicję projektanta.

#### 4. Przykłady oszacowania niepewności modelu nośności na ścinanie strefy podporowej belki

W celu zilustrowania i porównania przedstawionych w pracy sposobów oszacowania niepewności modelowej nośności w niniejszym punkcie przedstawiono wyniki obliczeń wartości miary niepewności modelu nośności na ścinanie strefy podporowej belki żelbetowej zalecanego w normach PN-EN 1992-1-1 [9] i PN-84/B-03264 [10].

a) Oszacowanie niepewności modelu nośności według procedur zawartych w PN-EN 1990

##### • Model nośności według PN-EN 1992-1-1

W rozważanej belce z pionowym zbrojeniem na ścinanie o nośności na ścinanie decyduje nośność strzemion  $V_{Rd,s}$ :

$$r_d = V_{Rd,s} = 0,8 \frac{A_{sw}}{s} f_{ywd} z \cot \theta \quad (24)$$

gdzie:  $A_{sw} = X_1$  – pole przekroju zbrojenia na ścinanie,  $s$  – rozstaw strzemion,  $f_{ywd} = X_2$  – obliczeniowa granica plastyczności zbrojenia na ścinanie,  $z$  – ramię sił wewnętrznych,  $\cot \theta = X_3$  – kąt nachylenia krzyżulca betonowego do osi podłużnej belki.

Zmienne losowe  $X_1, X_2, X_3$  opisano z pomocą wartości oczekiwanej  $X_{m,i}$  i odchylenia standardowego  $\sigma_i$  lub współczynnika zmienności  $v_i = \sigma_i / X_{m,i}$ :

$$\begin{aligned} X_{m,1} &= 106 \text{ mm}^2, & \sigma_1 &= 20 \text{ mm}^2, & v_1 &= 0,02 \\ X_{m,2} &= 490 \text{ MPa}, & \sigma_2 &= 24,5 \text{ MPa}, & v_2 &= 0,05 \\ X_{m,3} &= 1,00, & \sigma_3 &= 0,25, & v_3 &= 0,25 \end{aligned}$$

Pozostałe zmienne we wzorze (24) potraktowano jako zdeterminowane:

$$d = 0,50 \text{ m}, \quad z \cong 0,9 \times d = 0,45 \text{ m}, \quad s = 100 \text{ mm}.$$

Probabilistyczny model nośności przedstawiono w postaci  $V_{R,s} = r = br_t \delta$ , gdzie współczynnik dostosowania  $b = 1,146$  i błąd  $\delta (\Delta = 0,541; v_\delta = 0,153)$  obliczono zgodnie z procedurą przedstawioną w p.3 dla zbioru 21 wyników badań (rys.1). Wartość oczekiwaną nośności  $r_m = V_{Rm,s} = 254,206 \text{ kN}$ , oraz wartość charakterystyczną i obliczeniową nośności  $r_k = V_{Rk,s} = 136,08 \text{ kN}$  i  $r_d = V_{Rd,s} = 89,30 \text{ kN}$  obliczono według wzorów (10), (12) i (17).

Całkowity współczynnik częściowy nośności na ścinanie jest zgodnie z założeniem metody częściowych współczynników iloczynem oddzielnych współczynników częściowych związanych z niepewnością właściwości materiału  $\gamma_m = 1 / (1 - 1,64v_m) = 1,09$  oraz z niepewnością modelu nośności  $\gamma_{Rd} = r_k / r_d = 1,52$  i wynosi  $\gamma_M = \gamma_m \gamma_{Rd} = 1,66$ .

#### • Model nośności według PN-84/B-03264

W rozważanej belce ze zbrojeniem w postaci strzemion pionowych o nośności na ścinanie decyduje nośność strzemion pionowych i betonu w strefie ściskanej przekroju ukośnego:

$$r_d = Q_{sb} = 2\sqrt{\beta_s R_b b h_o^2 q_s} - R_{as} F_s, \quad q_s = R_{as} F_s / s \quad (25)$$

gdzie:  $R_b = f_{cd} = X_1$  – obliczeniowa wytrzymałość betonu na ściskanie,  $R_{as} = f_{ywd} = X_2$  – obliczeniowa granica plastyczności zbrojenia na ścinanie,  $F_s = A_{sw} = X_3$  – pole przekroju zbrojenia na ścinanie,  $s$  – rozstaw strzemion,  $h_o = d$  – wysokość użyteczna przekroju.

Zmienne losowe  $X_1, X_2, X_3$  opisano z pomocą wartości oczekiwanej  $X_{m,i}$  i odchylenia standardowego  $\sigma_i$  lub współczynnika zmienności  $v_i = \sigma_i / X_{m,i}$ :

$$\begin{aligned} X_{m,1} &= 28 \text{ MPa}, & \sigma_1 &= 4,2 \text{ MPa}, & v_1 &= 0,15 \\ X_{m,2} &= 490 \text{ MPa}, & \sigma_2 &= 24,5 \text{ MPa}, & v_2 &= 0,05 \\ X_{m,3} &= 106 \text{ mm}^2, & \sigma_3 &= 20 \text{ mm}^2, & v_3 &= 0,02 \end{aligned}$$

Pozostałe zmienne we wzorze (25) potraktowano jako zdeterminowane:

$$h_o = d = 0,50 \text{ m}, \quad s = 100 \text{ mm}, \quad \beta_s = 0,15.$$

Przyjęto probabilistyczny model nośności w postaci  $Q_{sb} = r = br_t \delta$ , gdzie współczynnik dostosowania  $b = 1,312$  i błąd  $\delta (\Delta = 0,625; v_\delta = 0,177)$ , obliczono zgodnie z procedurą przedstawioną w p.3 dla zbioru 21 wyników badań (rys.1). Wartość oczekiwaną nośności  $r_m = Q_{m,sb} = 312,89 \text{ kN}$ , oraz wartość charakterystyczną i obliczeniową nośności  $r_k = Q_{k,sb} = 204,04 \text{ kN}$  i  $r_d = Q_{d,sb} = 143,95 \text{ kN}$  obliczono według wzorów (10), (12) i (17). Całkowity współczynnik częściowy nośności na ścinanie jest zgodnie z założeniem metody częściowych współczynników iloczynem oddzielnych współczynników częściowych związanych z niepewnością właściwości materiału  $\gamma_m = 1 / (1 - 1,64v_m) = 1,35$  oraz z niepewnością modelu nośności  $\gamma_{Rd} = r_k / r_d = 1,42$  i wynosi  $\gamma_M = \gamma_m \gamma_{Rd} = 1,91$ .

b) Oszacowanie niepewności modelu nośności według propozycji autorskiej

• **Model nośności według normy PN-EN 1992-1-1**

Wartość oczekiwana nośności na ścinanie obliczona na podstawie normowej formuły (24) wynosi  $r_m = V_{Rm,s} = 254,206$  kN. Wartość współczynnika zmienności nośności belek żelbetowych na ścinanie  $v_r$  oszacowana na podstawie wyników badań doświadczalnych, mieści się w granicach  $v_r = 0,17 \div 0,25$ . Dla elementu konstrukcyjnego klasy niezawodności RC2 i okresu odniesienia 50 lat, zalecana w normie PN-EN 1990 wartość wskaźnika niezawodności wynosi  $\beta_R = -0,8$ ,  $\beta = -0,8 \times 3,8 = -3,04$ . Uwzględniając multiplikatywną postać wzoru (24), dla mediany nośności  $\tilde{r} = r_m / (1 + v_r^2) = 247,066 \div 239,253$  kN i logarytmicznego współczynnika zmienności  $v_r = [\ln^2 + 1]^{0,5} = 0,169 \div 0,246$ , wyznaczono przedział, w którym zawiera się obliczeniowa nośność belki na ścinanie:  $r_d = \tilde{r} \exp(\beta v_r) = 147,81 \div 113,26$  kN.

Wartość współczynnika częściowego  $\gamma_{Rd}$ , który jest miarą niepewności modelowej zawiera się w przedziale  $\gamma_{Rd} = \gamma_R / \gamma_1 = (r_m / r_d) / \gamma_1 = 1,49 \div 1,84$ , a  $\gamma_M = 1,71 \div 2,11$ .

• **Model nośności według normy PN-84/B-03264**

Wartość oczekiwana nośności na ścinanie obliczona na podstawie normowej formuły (25) wynosi  $r_m = Q_{m,sb} = 312,89$  kN, a jej mediana  $\tilde{r} = r_m / (1 + v_r^2) = 304,101 \div 294,485$  kN. Zgodnie z procedurą obliczeń zastosowaną dla modelu według normy PN-EN 1992-1-1 obliczono przedział, w którym zawiera się obliczeniowa nośność belki na ścinanie:  $r_d = \tilde{r} \exp(\beta v_r) = 186,62 \div 146,33$  kN.

Wartość współczynnika częściowego  $\gamma_{Rd}$ , który jest miarą niepewności modelowej zawiera się w przedziale  $\gamma_{Rd} = \gamma_R / \bar{\gamma}_1 = (r_m / r_d) / \bar{\gamma}_1 = 1,34 \div 1,71$ , a  $\gamma_M = 1,67 \div 2,14$ .

Wyniki obliczeń uzyskane za pomocą obu sposobów zgodnie świadczą, że model nośności na ścinanie zalecany w normie PN-84/B-02364 charakteryzuje się mniejszą niepewnością niż zalecany w normie PN-EN 1992-1-1. Różnice poziomu niepewności modelowej są jednak niewielkie i dla pierwszego sposobu oceny wynoszą około 7%, a dla drugiego mieszczą się w przedziale 7% - 11%.

## 5. Podsumowanie

Niepewność modeli nośności elementów żelbetowych stosowanych we współczesnych normach projektowania jest zdecydowanie większa niż niepewność fizyczna i statystyczna związana z właściwościami materiałów konstrukcyjnych i ich oceną.

W półprobabilistycznej metodzie współczynników częściowych, która jest podstawową metodą weryfikacji niezawodności konstrukcji przyjętą w Eurokodach, przewidziano możliwość oddzielnego ustalania współczynnika częściowego związanego z niepewnością właściwości materiału i z niepewnością modelu nośności. Nie podano jednak zaleceń dotyczących sposobu określenia wartości współczynnika reprezentującego niepewność modelu nośności.

W pracy przedstawiono dwa sposoby oceny niepewności modelowej nośności. Pierwszy opiera się na normowej procedurze statystycznej kalibracji modeli nośności i szacowania wartości obliczeniowych na podstawie wyników badań doświadczalnych. Sposób drugi, autorski, nawiązuje do ogólnych zaleceń dotyczących oceny niezawodności w przypadku nieliniowych modeli nośności i umożliwia uproszczoną ocenę wartości współczynnika częściowego związanego z niepewnością modelu nośności z wykorzystaniem charakterystyki zmienności nośności elementu lub konstrukcji o wartości znanej *a priori* lub ustalonej na podstawie dodatkowych badań.

Przedstawiona metoda autorska umożliwia uproszczoną, ale dostatecznie dokładną ocenę wartości współczynnika częściowego związanego z niepewnością modelu nośności, a także porównanie dokładności stosowanych modeli nośności.

## Literatura

- 1 PN-EN 1990:2002, Eurokod. Podstawy projektowania konstrukcji. PKN, Warszawa 2004.
- 2 Nowak A., Collins K. R. Reliability of Structures. Mc Grow Hill, Boston, etc. 2000.
- 3 Woliński Sz., Wróbel K. Niezawodność konstrukcji budowlanych. Oficyna Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 2001.
- 4 Blockly D.I. The nature of structural design and safety. Halsted Press, J. Wiley & Sons, LTD, New York 1980.
- 5 Woliński Sz. Control of human errors through the design supervision and execution inspection. IABSE Symposium on Structures and Extreme Events. Lisbon 2005. IABSE Reports. Vol. 90, (2005), 362-363 (+full version 12 pp. in CD).
- 6 Waarts P.H., Wit de M.S. Does more sophisticated models reduce uncertainty? Journal Heron, Vol. 49, no. 2, (2004) 119-137.
- 7 Standard ISO 12491: 1997, Statistical methods for global quality control of building materials and components.
- 8 Woliński Sz. Global safety factor for nonlinear design of concrete structures. Archives of Civil Engineering, T. LVII, z. 3, (2011) s. 331-339.
- 9 PN-EN 1992-1-1:2008, Eurokod 2. Projektowanie konstrukcji z betonu. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków. PKN, Warszawa 2008.
- 10 PN-84/B-03264. Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone. Obliczenia statyczne i projektowanie. PKN, Wydawnictwa Normalizacyjne "ALFA", Warszawa 1984.

## The evaluation of uncertainty in the resistance models of reinforced concrete members

Szczepan Woliński<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Department of Building Structures, Faculty of Civil and Environmental Engineering, Rzeszów University of Technology, e-mail: szwolkkb@prz.edu.pl*

**Abstract:** The paper presents the analysis and evaluation methods of uncertainty in the resistance models of reinforced concrete members. The first method is based on a standardized procedure for the calibration of resistance models given in the Eurocode. The second method is an original proposal for the evaluation of uncertainty in the resistance models using the available test data on resistance variation. According to the concept of semi-probabilistic partial factors design, the partial factor resulting from model uncertainty, separated from the factor of resistance, represents a measure of model uncertainty. The approach to model uncertainty evaluation is demonstrated with the use two different sample models for shear capacity assessment of reinforced concrete beams.

**Keywords:** resistance of RC elements, parameter uncertainty, model uncertainty, partial factors, model uncertainty assessment.