

Równania ruchu konstrukcji głównej z dołączonymi tłumikami drgań opisanymi standardowym modelem reologicznym

Piotr Wielgos

*Katedra Mechaniki Budowli, Politechnika Lubelska, Wydział Budownictwa i Architektury,
e-mail: p.wielgos@pollub.pl*

Streszczenie: W artykule przedstawiono matematyczny model konstrukcji głównej z wbudowanymi wielokrotnymi strojonymi tłumikami drgań. Bardzo ważną kwestią, związaną z tym modelem jest budowa globalnej macierzy tłumienia ustroju. Przedstawione zostaną własne propozycje elementów MES, opisujących dodatkowe elementy dołączone do ustroju głównego w postaci strojonych tłumików drgań. Omówione zostaną także korzyści płynące z zastosowania nowych elementów MES.

Słowa kluczowe: wielokrotne strojone tłumiki masowe, globalna macierz tłumienia, elementy MES.

1. Wstęp

Obecnie wyróżniamy kilka metod i technologii umożliwiających redukcję drgań spowodowanych różnorodnymi oddziaływaniami. W zależności od rodzaju tych oddziaływań niektóre z metod są skuteczniejsze od innych, niekiedy jedyne jakie można zastosować. W zależności od sposobu i podejścia do problemu redukcji drgań możemy wyróżnić następujące grupy metod redukcji niepożądanych drgań:

- metody pasywnej redukcji drgań;
- metody aktywnej redukcji drgań;
- metody półaktywnej redukcji drgań;
- metody mieszane.

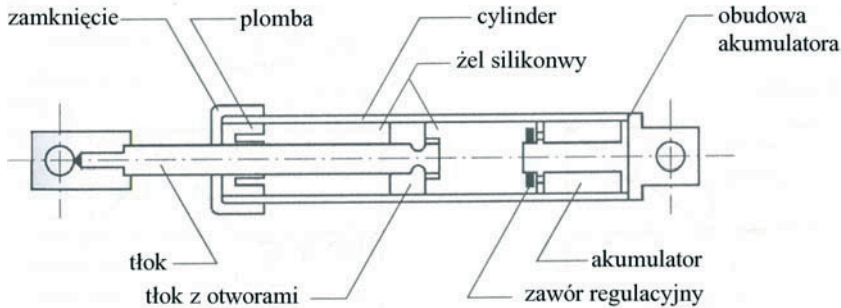
W niniejszej pracy skupiono się na pasywnej metodzie redukcji drgań, i jest ona najczęściej stosowana w konstrukcjach rzeczywistych. Pasywna redukcja drgań możliwa jest dzięki, wprowadzeniu dodatkowych elementów zwanych dalej *tłumikami drgań* (TD). Głównym ich zadaniem jest zwiększenie możliwości rozpraszania energii w trakcie drgań ustroju, lecz możliwa jest także zmiana charakterystyk częstotliwościowych ustroju. W zasadzie we wszystkich przypadkach, jakakolwiek zmiana parametrów tłumienia zmienia charakterystyki częstotliwościowe ustroju (zmiana zespolonych wartości własnych). Cechą wyróżniającą tłumiki pasywne jest to, że nie dostarczają one energii do układu głównego, a wykorzystują drgania konstrukcji do wywołania dodatkowych sił tłumiących. Inną cechą tych tłumików jest to, że ich parametry nie zmieniają się w czasie. Metody aktywnej i półaktywnej redukcji drgań nie będą omawiane w pracy. Można tylko stwierdzić, że w więk-

zości przypadków są one skuteczniejsze od metod pasywnej redukcji drgań, ale wymagają zainstalowania dodatkowych urządzeń na konstrukcji (czujniki, komputery, wzбудniki). Cechą charakterystyczną tego rodzaju tłumików jest dostarczanie energii (wprowadzenie dodatkowych sił aktywnej regulacji) do układu poprzez wzbudniki. Szeroko omówione metody aktywnej i półaktywnej redukcji drgań można znaleźć w pracy Lewandowskiego [3].

W pierwszej części pracy przedstawione zostaną podstawowe dane o pasywnych tłumikach drgań, następnie omówione zostaną sposoby wbudowania ich w konstrukcję główną. Końcowym efektem pracy jest propozycja własnych elementów MES opisujących dodatkowe elementy dołączone do ustroju głównego w postaci tłumików drgań. Modele elementów MES zostały omówione także w pracy Wielgosa [6].

2. Wiskotyczne tłumiki drgań

Tłumiki wiskotyczne zazwyczaj składają się z cylindra wypełnionego cieczą o dużej lepkości, w którym porusza się tłok z otworami. Podczas ruchu tłoka wymuszany jest ruch cieczy, której przepływ w zależności od częstości wymuszenia i prędkości cieczy w cylindrze może mieć różny charakter. Energia rozpraszana jest na skutek tarcia pomiędzy cząsteczkami płynu a tłokiem. Na Rys. 1 przedstawiono schemat takiego tłumika.



Rys. 1. Tłumik wiskotyczny.

Fig. 1. The viscous damper.

Ze względu na różne charakterystyki lepkościowe cieczy oraz zmiany ciśnienia w cylindrze w zależności od temperatury, często dodatkowym elementem jest akumulator cieczy kompensujący zmiany ciśnienia w cylindrze.

Siła wywołwana przez tego rodzaju tłumik, w ogólności ma postać:

$$F_t(t) = c \begin{cases} (\dot{x}(t))^\alpha & \dot{x}(t) \geq 0 \\ -(-\dot{x}(t))^\alpha & \dot{x}(t) < 0 \end{cases} \quad (1)$$

gdzie c jest współczynnikiem tłumienia, prędkością względną tłoka względem cylindra a α współczynnikiem. W ogólności współczynnik α , zawiera się $0,3 < \alpha < 2$ w zależności od rodzaju tłumika, charakteru wymuszenia itd. Siły tłumienia są proporcjonalne do względnej prędkości tłoka w przypadku, gdy przepływ cieczy jest laminarny, czyli dla małych prędkości tłoka. W sytuacji gdy dany ustrój poddany jest dynamicznemu oddziaływaniu wiatru, którego spektrum częstotliwościowe nie

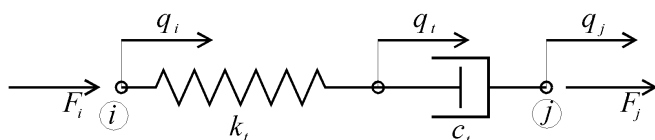
przekracza 2 Hz, mamy do czynienia z przepływem laminarnym w tłumiku $\alpha \cong 0$. Dobrym przybliżeniem jest wtedy zależność:

$$F_i(t) = c\dot{x}(t) \tag{2}$$

3. Lepkosprężyste tłumiki drgań

Przykładem tłumika lepkosprężystego może być także tłumik omówiony w poprzednim rozdziale, w którym ciecz wykazuje własności lepkosprężyste.

Do opisu tego typu tłumika może służyć model Maxwella, schematycznie przedstawionym na Rys. 2.



Rys. 2. Model reologiczny Maxwella.
Fig. 2. Maxwell rheological model.

W elementach modelu Maxwella panują jednakowe siły, które są opisane zależnościami:

$$T_i(t) = F_j(t) = c_t\dot{x}(t) \tag{3}$$

$$T_i(t) = -F_i(t) = yk_t = k_t(q_i(t) - q_j(t)) \tag{4}$$

gdzie $x(t) = q_j(t) - q_i(t)$, $y(t) = q_i(t) - q_j(t)$. Różnica przemieszczeń punktu j oraz i $\Delta q(t) = q_j(t) - q_i(t)$ jest równa sumie różnic $\Delta q(t) = x(t) + y(t)$, więc możemy zapisać:

$$\Delta q(t) = \frac{1}{k_t}T_i(t) + x(t) \tag{5}$$

Po zróżniczkowaniu równania względem czasu otrzymujemy:

$$\Delta\dot{q}(t) = \frac{1}{k_t}\dot{T}_i(t) + \frac{1}{c_t}T_i(t) \tag{6}$$

Ostatecznie wzór można przedstawić w postaci:

$$c_t\Delta\dot{q}(t) = \tau_t\dot{T}_i(t) + T_i(t) \tag{7}$$

gdzie $\tau_t = c_t / k_t$ jest czasem relaksacji.

Opisane wyżej równanie jest bardzo niewygodne do stosowania w analizie MES. Jego postać wynika z usunięcia stopnia swobody związanego z przemieszczeniem $q_i(t)$, co w efekcie wprowadza wielkość $\tau_t\dot{T}_i(t)$. Z tego też względu wartość siły tłumiącej zależy od częstości wymuszenia λ . Jeżeli przemieszczenie oraz siła w tłumiku zmieniają się harmonicznym w czasie z częstością kołową wymuszenia przy drganiach ustalonych λ , według wzorów $T_i(t) = T_0 \exp(i\lambda t)$, $\Delta q(t) = \Delta q_0 \exp(i\lambda t)$ otrzymujemy następującą zależność w dziedzinie częstości:

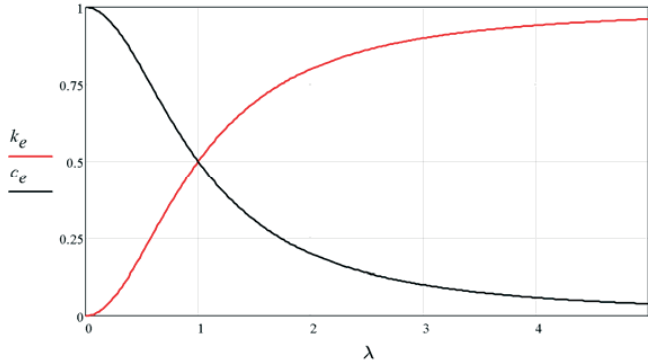
$$i\lambda c_t \Delta q_0 = i\lambda \tau_i T_0 + T_0 \quad (8)$$

$$T_0 = \frac{i\lambda c_t}{1 + i\lambda \tau_i} \Delta q_0 = (k_e + i\lambda c_e) \Delta q_0 = k_e (1 + i\eta_e) \Delta q \quad (9)$$

gdzie:

$$\tau_i = \frac{c_t}{k_t} \quad k_e = k_t \frac{\lambda^2 \tau_i^2}{1 + \lambda^2 \tau_i^2} \quad c_e = c_t \frac{1}{1 + \lambda^2 \tau_i^2} \quad \eta_e = \frac{\lambda c_e}{k_e} \quad (10)$$

Na Rys. 3 przedstawiono wykres $c_e(\lambda)$ oraz $k_e(\lambda)$, przy danych $c_t = 1$, $k_t = 1$.



Rys. 3. Wykres $c_e(\lambda)$ oraz $k_e(\lambda)$ dla modelu Maxwella.

Fig. 3. Plots of $c_e(\lambda)$ and $k_e(\lambda)$ in the case of Maxwell model.

Sztywność k_t tłumika dla modelu Maxwella, wyznacza się dla nieskończenie dużej częstości wymuszenia $\lambda = \infty$, zaś współczynnik tłumienia c_t dla zerowej częstości wymuszenia $\lambda = 0$. Otrzymujemy wtedy odpowiednio:

$$k_t = k_e \quad c_t = c_e \quad (11)$$

Jeżeli stopień swobody związany z $q_i(t)$ nie zostanie usunięty, zniknie składnik $\tau_i \ddot{F}_i(t)$. Jeżeli napiszemy równania ruchu dla każdego stopnia swobody otrzymamy układ trzech równań:

$$F_i(t) = k_t (q_i(t) - q_j(t)) \quad (12)$$

$$F_i(t) = k_t (q_i(t) - q_j(t)) + c_t (\dot{q}_i(t) - \dot{q}_j(t)) \quad (13)$$

$$F_j(t) = c_t (\dot{q}_j(t) - \dot{q}_i(t)) \quad (14)$$

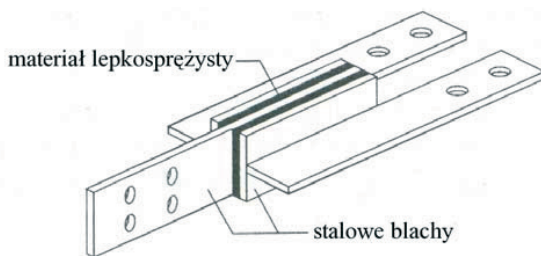
który w pełni opisuje model reologiczny Maxwella.

Niestety w literaturze np. w pracy Lewandowskiego [3], często stosuje się podejście, w którym usuwany jest ten stopień swobody i dokładane są do równań ruchu siły pochodzące od tłumików, w którym występuje pierwsza pochodna tej siły $\dot{T}_i(t)$. Powstały układ równań nie może być wtedy obliczony klasycznymi metodami MES i często wprowadza się uproszczenie, iż parametry tłumika są stałe, niezależne od częstości wymuszenia, lub są określone dla pierwszej, dominującej w odpowiedzi ustroju częstości drgań własnych. Upraszcza to model obliczeniowy

tłumika, który w zasadzie sprowadza się do modelu reologicznego Kelvina–Voigta, w którym dodatkowa siła tłumienia jest postaci:

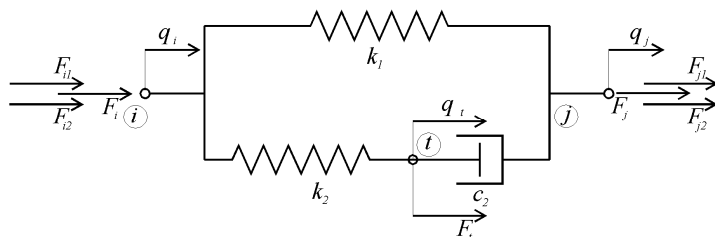
$$T_i(t) = k_i \Delta q(t) + c_i \Delta \dot{q}(t) \tag{15}$$

Innym typem tłumików lepkosprężystych są tłumiki, w których element tłumiący wykonany jest z substancji szklanych lub kopolimerów. Rozpraszanie energii w takich materiałach odbywa się w trakcie zmian postaciowych. Zazwyczaj taki tłumik składa się z dwu płyt przymocowanych do płyt stalowych. Schemat takiego tłumika przedstawiono na Rys. 4.



Rys. 4. Tłumik lepkosprężysty.
Fig. 4. The viscoelastic damper.

Do opisu tego typu tłumików najczęściej stosowany jest standardowy model reologiczny (SMR). Jest on kombinacją omówionego wcześniej modelu Maxwella oraz Kelvina–Voigta. Schemat do określenia sił w tym modelu przedstawiono na Rys. 5.



Rys. 5. Standardowy model reologiczny.
Fig. 5. Standard rheological model.

Zależności podstawowe przedstawione są poniżej:

$$F_i(t) = F_{i1}(t) + F_{i2}(t) \quad F_j(t) = F_{j1}(t) + F_{j2}(t) \quad F_j(t) = -F_i(t) \tag{16}$$

$$q_j(t) - q_i(t) = (q_i(t) - q_t(t)) + (q_j(t) - q_t(t)) \tag{17}$$

Wielkości opisujące poszczególne siły dla części drugiej modelu Maxwella będą miały następującą postać:

$$F_{i2}(t) = k_2 (q_i(t) - q_t(t)) \tag{18}$$

$$F_i(t) = k_2 (q_t(t) - q_i(t)) + c_2 (\dot{q}_i(t) - \dot{q}_j(t)) \tag{19}$$

$$F_{j2}(t) = c_2 (\dot{q}_j(t) - \dot{q}_i(t)) \tag{20}$$

zaś dla części pierwszej:

$$F_{i1}(t) = k_1(q_i(t) - q_j(t)) \quad (21)$$

$$F_{j1}(t) = k_1(q_j(t) - q_i(t)) \quad (22)$$

Jeżeli do równania (17) podstawimy zależności wynikające z równań (18) oraz (21), otrzymamy:

$$-F_{i1}(t)/k_1 = -F_{i2}(t)/k_2 + (q_j(t) - q_i(t)) \quad (23)$$

Sprowadzając do wspólnego mianownika, podstawiając $F_{i2}(t) = F_i(t) - F_{i1}(t)$ oraz różniczkując względem czasu t , otrzymujemy:

$$\frac{-\dot{F}_{i1}(t)(k_1 + k_2)}{k_1 k_2} + \frac{\dot{F}_i(t)}{k_2} = (\dot{q}_j(t) - \dot{q}_i(t)) \quad (24)$$

Zależność po prawej stronie równania możemy wyznaczyć z równania (20). Uwzględniając $F_{j2}(t) = -F_{i2}(t)$ oraz $F_{i2}(t) = F_i(t) - F_{i1}(t)$, otrzymujemy:

$$\frac{\dot{F}_{i1}(t)(k_1 + k_2)}{k_1 k_2} = \frac{\dot{F}_i(t)}{k_2} + \frac{F_i(t)}{c_2} - \frac{F_{i1}(t)}{c_2} \quad (25)$$

Po uwzględnieniu zależności $\dot{F}_{i1}(t) = k_1(\dot{q}_i(t) - \dot{q}_j(t))$ oraz (21), ostatecznie otrzymujemy znany wzór dla modelu standardowego:

$$c_2 \Delta \dot{q}(t) = \frac{k_2}{k_1 + k_2} (\tau \dot{F}_i(t) + F_i(t) - k_1 \Delta q(t)) \quad (26)$$

lub, po przekształceniach:

$$\tau(k_1 + k_2) \Delta \dot{q}(t) + k_1 \Delta q(t) = \tau \dot{F}_i(t) + F_i(t) \quad (27)$$

gdzie $\tau = c_2 / k_2$, $\Delta q(t) = q_i(t) - q_j(t)$, $\Delta \dot{q}(t) = \dot{q}_i(t) - \dot{q}_j(t)$

Ze wzorów powyższych wynika, iż jeżeli zredukujemy wartość $k_1 = 0$, to otrzymamy model reologiczny Maxwella. Jeżeli natomiast wartość $k_2 \rightarrow \infty$, to model standardowy upraszcza się do modelu Kelvina–Voigta.

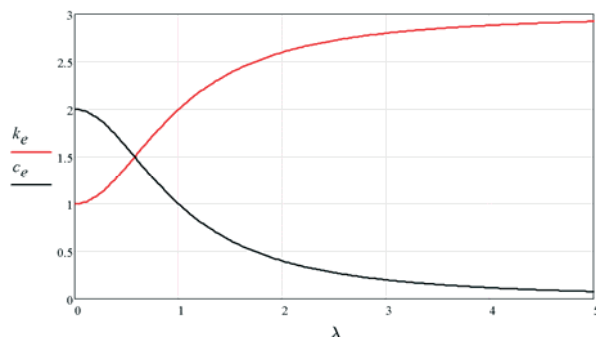
Podobnie, jak dla modelu Maxwella, jeżeli przyjmiemy opis sił tłumienia oraz przemieszczenia względnego w postaci $F_i(t) = F_0 \exp(i\lambda t)$, $\Delta q(t) = \Delta q_0 \exp(i\lambda t)$ to otrzymamy:

$$F_0 = \frac{k_1 + i\lambda\tau(k_1 + k_2)}{1 + i\lambda\tau} \Delta q_0 = (k_e + i\lambda c_e) \Delta q_0 = k_e (1 + i\eta_e) \Delta q \quad (28)$$

gdzie:

$$\tau = \frac{c_2}{k_2} \quad k_e = \frac{k_1 + \lambda^2 \tau^2 (k_1 + k_2)}{1 + \lambda^2 \tau^2} \quad c_e = \frac{c_2}{1 + \lambda^2 \tau^2} \quad \eta_e = \frac{\lambda c_e}{k_e} \quad (29)$$

Wielkość $k_e + i\lambda c_e$ nazywana jest sztywnością zespoloną. Na Rys. 6 przedstawiono wykres $c_e(\lambda)$ oraz $k_e(\lambda)$, przy danych $c_2 = 2$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$.

Rys. 6. Wykres $c_e(\lambda)$ oraz $k_e(\lambda)$.Fig. 6. Plots of $c_e(\lambda)$ and $k_e(\lambda)$.

Współczynnik tłumienia c_2 oraz sztywność k_1 , wyznacza dla zerowej częstości wymuszenia $\lambda = 0$. Otrzymujemy wtedy:

$$k_1 = k_e, \quad c_2 = c_e \quad (30)$$

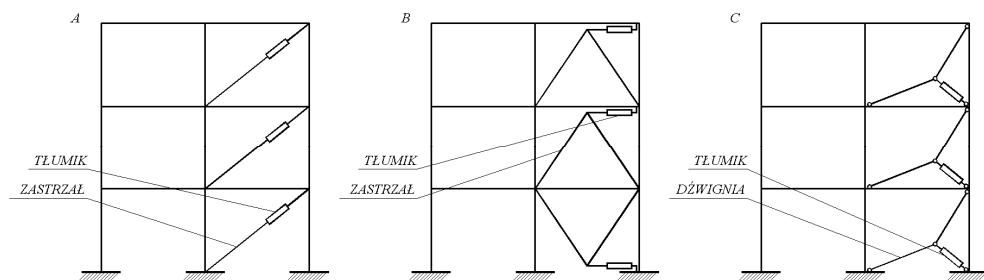
Dla nieskończenie dużej częstości wymuszenia $\lambda = \infty$, otrzymujemy odpowiednio:

$$k_e = k_1 + k_2, \quad c_e = 0 \quad (31)$$

Oczywiście, podobnie jak to miało miejsce w modelu reologicznym Maxwella, korzystniej jest wprowadzić element MES z dodatkowym stopniem swobody. Podejście takie, eliminuje pojawienie się w równaniach ruchu składnika z pierwszą pochodną siły tłumienia $\dot{F}_i(t)$. W następnym rozdziale zostanie wyprowadzony autorski element MES modelujący tłumik lepkosprężysty.

4. Sposoby wbudowania tłumików drgań w konstrukcję główną

Tłumiki wiskotyczne jak i lepkosprężyste mogą być wbudowywane w konstrukcję w różnorodny sposób. Najczęściej spotykane układy przedstawione są na Rys. 7.

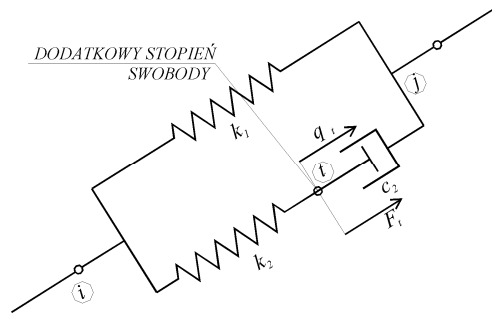


Rys. 7. Schemat wbudowania tłumików wiskotycznych i lepkosprężystych w konstrukcję główną.
Fig. 7. The installation scheme of viscous and viscoelastic dampers in the main structure.

Na schemacie A oraz B, przedstawione jest typowe rozwiązanie umieszczenia TD na konstrukcji głównej. Rozwiązanie przedstawione na schemacie C, jest

korzystniejsze od tych przedstawionych na schemacie A oraz B. Zwiększenie siły tłumienia wynika z zastosowania dźwigni i zwiększenia przemieszczeń oraz prędkości punktu, do którego przymocowany jest tłumik.

We wszystkich wypadkach najkorzystniej jest wymodelować przy analizie MES zastrzały. Unika się w ten sposób traktowania zastrzałów jako elementu „nowego tłumika” złożonego z zastrzału oraz właściwego tłumika. Model matematyczny, opisujący taki układ jest jeszcze bardziej złożony od wcześniej opisanego modelu Maxwella. W ogólności mamy wtedy do czynienia z układem szeregowym dwóch sprężyn i tłumika wiskotycznego. Nie należy więc usuwać stopni swobody związanych z punktami zamocowania tłumika, gdyż w znacznym stopniu utrudnia to analizę drgań takiego ustroju. Dla przypadku modelu tłumika opisanego modelem Kelvina–Voigta nie jest konieczne wprowadzanie dodatkowego stopnia swobody układu, zaś dla modeli Maxwella oraz standardowego modelu reologicznego (SMR) należy wprowadzić dodatkowy stopień swobody (jest to stopień swobody związany z wewnętrznym ruchem materiału lepkosprężystego), który pozwoli uniknąć omówionych w poprzednich podrozdziałach trudności obliczeniowych.



Rys. 8. Wprowadzenie dodatkowego stopnia swobody dla modelu.

Fig. 8. The introduction of the additional degree of freedom to the model.

5. Równania ruchu układu głównego z dołączonymi tłumikami lepkosprężystymi

Podobnie jak w przypadku ustroju składającego się z podstruktur wykonanych z różnych materiałów, tak i w przypadku dołączenia tłumików opisanych standardowym modelem reologicznym SMR do układu głównego, poszczególne macierze modelu można rozbić na dwie podmacierze:

- konstrukcja główna (przez N – oznaczmy stopnie swobody układu głównego);
- dołączone tłumiki (przez N_t – oznaczmy liczbę dołączonych tłumików).

Równania ruchu mogą być wtedy zapisane w postaci:

$$(\mathbf{M}_{KG} + \mathbf{M}_T)\ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{C}_{KG} + \mathbf{C}_T)\dot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{K}_{KG} + \mathbf{K}_T)\mathbf{q}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (32)$$

Globalna liczba stopni swobody układu będzie wynosić $N + N_t$ (każdy TD-SMR powoduje zwiększenie globalnej liczby stopni swobody o jeden). Poniżej przedstawiono postacie macierzy \mathbf{C}_T , \mathbf{K}_{KG} , \mathbf{M}_T , przy założeniu, że dodatkowe stopnie swobody wynikające z zastosowania TD-SMR występują z ostatnimi numerami:

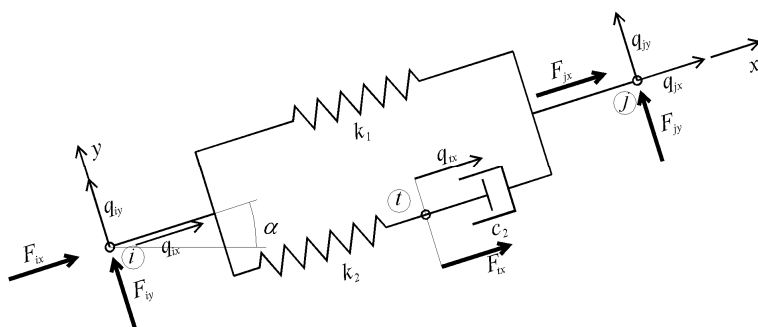
$$\mathbf{M}_{KG} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{K;N,N} & \mathbf{0}_{N,N_i} \\ \mathbf{0}_{N_i,N} & \mathbf{0}_{N_i,N_i} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{KG} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{K;N,N} & \mathbf{0}_{N,N_i} \\ \mathbf{0}_{N_i,N} & \mathbf{0}_{N_i,N_i} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_{KG} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{K;N,N} & \mathbf{0}_{N,N_i} \\ \mathbf{0}_{N_i,N} & \mathbf{0}_{N_i,N_i} \end{bmatrix} \quad (33)$$

W przypadku konstrukcji wielomateriałowych, składających się z materiałów o różnych właściwościach sprężystych czy też o różnych właściwościach tłumiących, macierze \mathbf{M}_K , \mathbf{K}_K , \mathbf{C}_K należy budować według znanego modelu Reyleigh'a, czy też modelu tłumienia opisanego przez Caughey'a [2].

Poniżej, zostanie przedstawiony sposób budowy poszczególnych macierzy sztywności elementów opisanych modelem SMR w przypadku ustroju dwuwymiarowego, a następnie jego uogólnienie na układ przestrzenny. Wprowadzone zostaną pojęcia elementu TD-SMR-2D (tłumik drgań – standardowy model reologiczny) oraz elementu TD-SMR-3D. Są to całkowicie nowe elementy MES, które mogą być zastosowane w programach obliczeniowych MES.

5.1. Element TD-SMR-2D

Na Rys. 9 przedstawiono schemat elementu tłumika o charakterystyce lepko-sprężystej TD-SMR-2D w układzie lokalnym.



Rys. 9. Element TD-SMR-2D w układzie lokalnym.

Fig. 9. The TD-SMR-2D element in local coordinate system.

Węzły i oraz j odpowiadają węzłom, do którego dołączany jest tłumik, zaś węzeł t jest węzłem dodatkowym, w którym skupiona jest masa własna drgającego materiału lepko-sprężystego. Przemieszczenie q_{tx} związane jest z ruchem wewnętrznym materiału lepko-sprężystego. Skupienie masy w węzle t , umożliwia uwzględnienie w modelu drgań własnych materiału lepko-sprężystego, co nie jest możliwe w modelach reologicznych. Masę całego tłumika można przedstawić w następującej formie:

$$m_t = m_{tw} + m_{t0} \quad (34)$$

gdzie m_{tw} jest masą materiału lepko-sprężystego zaś m_{t0} jest masą konstrukcji tłumika.

W rozważaniach można w uproszczeniu przyjąć, że połowa masy własnej materiału lepko-sprężystego m_{tw} skupiona jest węzle t na kierunku lokalnej osi x . W węzłach i oraz j na kierunku osi x skupiona czwarta część masy materiału lepko-sprężystego, oraz po połowie masy wynikającej z konstrukcji tłumika m_t . Na kierunku y w węzle i oraz j skupiona jest masa $0,5m_t$. W rzeczywistości masy

dodane do węzła i oraz j są pomijalnie małe w stosunku do masy konstrukcji i mogłyby być nie uwzględniane.

Kierunek działania tłumika określa wektor kierunkowy wynikający ze współrzędnych węzłów i oraz j w globalnym układzie współrzędnych XY w postaci $\mathbf{w}_k = [L_x, L_y]$. Pojedynczy tłumik drgań (TD) może wykonywać drgania tylko po kierunku x lokalnego układu współrzędnych, a więc z założenia $q_{iy} = 0$, oraz $F_{iy} = 0$. Transformacji do układu globalnego podlegają wielkości sił i przemieszczeń węzła początkowego i oraz końcowego j , zaś w węźle t pozostawiany jest układ lokalny.

Wektory przemieszczeń węzłowych elementu oraz sił węzłowych w układzie lokalnym dla k -tego tłumika będą miały następującą postać:

$$\mathbf{q}_k^{ie} = \begin{bmatrix} q_{ix} \\ q_{iy} \\ q_{jx} \\ q_{jy} \\ q_{tx} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_k^{ie} = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \\ F_{jx} \\ F_{jy} \\ F_{tx} \end{bmatrix} \quad (35)$$

zaś w układzie globalnym:

$$\mathbf{q}_k^{ie} = \begin{bmatrix} q_{iX} \\ q_{iY} \\ q_{jX} \\ q_{jY} \\ q_{tX} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}_k^{ie} = \begin{bmatrix} F_{iX} \\ F_{iY} \\ F_{jX} \\ F_{jY} \\ F_{tX} \end{bmatrix} \quad (36)$$

Macierze \mathbf{M}_k^{ie} , \mathbf{K}_k^{ie} , \mathbf{C}_k^{ie} w lokalnym układzie współrzędnych mają następującą postać:

$$\mathbf{M}_k^{ie} = \begin{bmatrix} 0,5m_{t0} + 0,25m_{tw} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5m_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5m_{t0} + 0,25m_{tw} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5m_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{tw} \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\mathbf{K}_k^{ie} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & 0 & -k_1 & 0 & -k_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 & 0 & k_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_k^{ie} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & 0 & -c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_2 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \quad (38)$$

Jeżeli nie uwzględnimy mas pochodzących od tłumika w węźle i oraz j (jako pomijalnie małe w stosunku do mas konstrukcji skupionych w węźle i oraz j), otrzymamy:

$$\mathbf{M}_k^{ie} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{tw} \end{bmatrix} \quad (39)$$

Dla pojedynczego elementu k możemy zapisać następujące równanie równowagi dynamicznej:

$$\mathbf{M}_k^{ie} \ddot{\mathbf{q}}^{ie}(t) + \mathbf{C}_k^{ie} \dot{\mathbf{q}}^{ie}(t) + \mathbf{K}_k^{ie} \mathbf{q}^{ie}(t) = \mathbf{f}^{ie}(t) \quad (40)$$

Jeżeli napiszemy powyższe równania w standardowej formie otrzymamy następujący układ równań:

$$F_{ix} = (k_1 + k_2)q_{ix}(t) - k_1q_{jx}(t) - k_2q_{ix}(t) \quad (41)$$

$$F_{iy} = 0 \quad (42)$$

$$F_{jx} = c_2(\dot{q}_{jx}(t) - \dot{q}_{ix}(t)) + k_1(q_{jx}(t) - q_{ix}(t)) \quad (43)$$

$$F_{jy} = 0 \quad (44)$$

$$F_{ix} = m_{tw}\ddot{q}_{ix}(t) + c_2(\dot{q}_{ix}(t) - \dot{q}_{jx}(t)) + k_2(q_{ix}(t) - q_{jx}(t)) \quad (45)$$

Transformacja poszczególnych macierzy elementu z układu lokalnego do globalnego odbywa się za pomocą znanych z MES wzorów (por. Rakowski i in. [5]):

$$\mathbf{q}^e(t) = \mathbf{R}^e \mathbf{q}^{ie}(t) \quad \mathbf{q}^{ie}(t) = (\mathbf{R}^e)^T \mathbf{q}^e(t) \quad (46)$$

$$\mathbf{f}^e(t) = \mathbf{R}^e \mathbf{f}^{ie}(t) \quad \mathbf{f}^{ie}(t) = (\mathbf{R}^e)^T \mathbf{f}^e(t) \quad (47)$$

gdzie macierz obrotu elementu jest dana wzorem:

$$\mathbf{R}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (48)$$

Macierz \mathbf{R}_i jest macierzą obrotu węzła początkowego, zaś \mathbf{R}_j węzła końcowego. Siły i przemieszczenia w węźle t nie podlegają obrotowi. Macierze obrotu węzła początkowego i końcowego dana jest wzorem:

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_j = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \quad (49)$$

gdzie: $c = \cos\alpha$, $s = \sin\alpha$.

Mnożąc lewostronnie równanie (40) przez \mathbf{R}^e oraz uwzględniając związek otrzymujemy równanie równowagi dynamicznej w układzie globalnym:

$$\mathbf{R}^e \mathbf{M}_k^{ie} (\mathbf{R}^e)^T \ddot{\mathbf{q}}^e(t) + \mathbf{R}^e \mathbf{C}_k^{ie} (\mathbf{R}^e)^T \dot{\mathbf{q}}^e(t) + \mathbf{R}^e \mathbf{K}_k^{ie} (\mathbf{R}^e)^T \mathbf{q}^e(t) = \mathbf{R}^e \mathbf{f}^{ie}(t) \quad (50)$$

Poszczególne macierze w układzie globalnym będą miały następującą postać:

$$\mathbf{M}_k^e = \mathbf{R}^e \mathbf{M}_k^{ie} (\mathbf{R}^e)^T \quad (51)$$

$$\mathbf{K}_k^e = \mathbf{R}^e \mathbf{K}_k^{ie} (\mathbf{R}^e)^T \quad (52)$$

$$\mathbf{C}_k^e = \mathbf{R}^e \mathbf{C}_k^{ie} (\mathbf{R}^e)^T \quad (53)$$

Jeżeli układ lokalny k – tego WSTM jest zgodny z układem globalnym ($c = 1$, $s = 0$) to macierze \mathbf{M}_k^e , \mathbf{K}_k^e , \mathbf{C}_k^e są odpowiednio równe \mathbf{M}_k^{ie} , \mathbf{K}_k^{ie} , \mathbf{C}_k^{ie} .

5.2. Element TD-SMR-3D

Transformacja poszczególnych macierzy elementu z układu lokalnego do globalnego odbywa się za pomocą wzorów (50). Na Rys. 10 przedstawiono podstawowe oznaczenia, służące do uzyskania macierzy obrotu węzła (por. Błazik-Borowa i Podgórski [1]).

Wektor kierunkowy działania STM można przedstawić w formie $\mathbf{w}_k = [L_x, L_y, L_z]$. Kierunek lokalnej osi x , jest zawsze wybierany wzdłuż wektora kierunkowego \mathbf{w}_k , kierunek y , tak aby oś y była równoległa do płaszczyzny XY układu globalnego. Obrót z układu lokalnego do globalnego złożony jest z dwóch obrotów pośrednich. Najpierw obracamy układ xyz o kąt β do pośredniego układu $x'y'z'$, dobranego tak aby oś x' była równoległa do płaszczyzny XY , a następnie obracamy układ $x'y'z'$ o kąt γ , tak, aby osie x' oraz X były równoległe. Macierze obrotu o kąt β oraz o kąt γ będą miały następujące postaci:

$$\mathbf{R}_\beta = \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & -s_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ s_\beta & 0 & c_\beta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R}_\gamma = \begin{bmatrix} c_\gamma & -s_\gamma & 0 \\ s_\gamma & c_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (54)$$

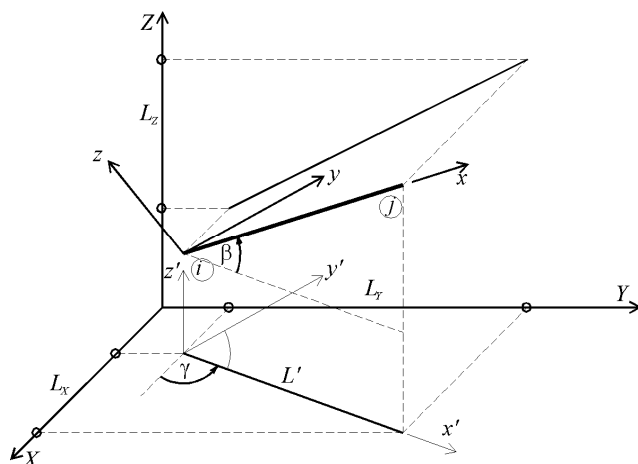
gdzie: $s_\beta = \sin \beta = L_z / L$ $c_\beta = \cos \beta = L' / L$

$s_\gamma = \sin \gamma = L_y / L'$ $c_\gamma = \cos \gamma = L_x / L'$

$L' = \sqrt{L_x^2 + L_y^2}$ $L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2}$

Macierz obrotu elementu jest analogiczna do postaci , z tym że macierze obrotu węzła początkowego i końcowego dana jest wzorem:

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{R}_j = \mathbf{R}_{iy} \mathbf{R}_{i\beta} = \begin{bmatrix} c_\gamma c_\beta & -s_\gamma & -c_\gamma s_\beta \\ s_\gamma c_\beta & c_\gamma & -s_\gamma s_\beta \\ s_\beta & 0 & c_\beta \end{bmatrix} \quad (55)$$



Rys. 10. Element strojonego tłumika masowego (STM-3D) w układzie globalnym.
Fig. 10. The element of the tuned mass damper (STM-3D) in the global system.

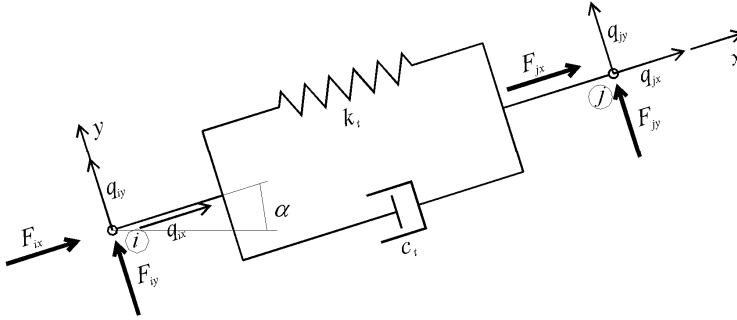
Postaci poszczególnych macierzy w układzie lokalnym przedstawiają poniższe wzory:

$$\mathbf{M}_k^{ie} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_{Dw} \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$\mathbf{K}_k^{ie} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & 0 & 0 & -k_1 & 0 & 0 & -k_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & 0 & k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_k^{ie} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & -c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_2 & 0 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \quad (57)$$

5.3. Układ główny z dołączonymi tłumikami opisanymi modelem Kelvina-Voigta

W przypadku zastosowania tłumików wiskotycznych lub opisanych modelem reologicznym Kelvina-Voigta (TD-KV), zamontowanych na konstrukcji głównej, przy pominięciu masy tłumików, modyfikacji podlega jedynie macierz sztywności i tłumienia konstrukcji głównej. Zastosowanie tego typu tłumików nie zwiększa globalnej liczby stopni swobody. Schemat elementu tłumika TD-KV-2D przedstawia Rys. 11.



Rys. 11. Element TD-KV-2D w układzie lokalnym.

Fig. 11. TD-KV-2D element in local coordinate system.

Element takiego tłumika jest całkowicie tożsamy z elementem kratownicy płaskiej, i nie będzie tutaj szerzej opisywany. Podana jedynie postać macierzy sztywności i macierzy tłumienia.

$$\mathbf{K}_k^e = \begin{bmatrix} k_t & 0 & -k_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_t & 0 & k_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_k^e = \begin{bmatrix} c_t & 0 & -c_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_t & 0 & c_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (58)$$

W przypadku tłumika wiskotycznego modyfikacji podlega jedynie globalna macierz tłumienia \mathbf{C} . Dla tłumika zamocowanego w konstrukcji przestrzennej poszczególne macierze są identyczne jak dla kratownicy przestrzennej.

5.4. Agregacja macierzy dla układu dynamicznego

Agregacja macierzy poszczególnych elementów SMR odbywa się w sposób analogiczny jak dla innych elementów znanych z MES. Może być przeprowadzona w sposób bezpośredni, gdzie dla każdego elementu tworzona jest macierz połączeń (przylegania) zawierająca relacje pomiędzy lokalnymi stopniami swobody a uporządkowanymi i przenumerowanymi globalnymi stopniami swobody. Macierz połączeń elementu \mathbf{A}^e jest prostokątna. Liczba wierszy tej macierzy jest równa ilości globalnych stopni swobody (w rozpatrywanym przypadku $N + N_t$), zaś liczba kolumn równa jest liczbie stopni elementu (5 – dla elementów 2D oraz 7 – dla elementów 3D). Globalne macierze: mas, sztywności oraz tłumienia będą opisane wzorami:

$$\mathbf{M}_T = \sum_{k=1}^{N_t} \mathbf{A}^e \mathbf{M}_k^e (\mathbf{A}^e)^T \quad \mathbf{K}_T = \sum_{k=1}^{N_t} \mathbf{A}^e \mathbf{K}_k^e (\mathbf{A}^e)^T \quad \mathbf{C}_T = \sum_{k=1}^{N_t} \mathbf{A}^e \mathbf{C}_k^e (\mathbf{A}^e)^T \quad (59)$$

W komputerowej implementacji często stosuje się podejście wykorzystujące wektory alokacji. Są to wektory, które zawierają odniesienie lokalnych stopni swobody do przenumerowanych globalnych stopni swobody. Przy tym podejściu, budowa globalnych macierzy \mathbf{M}_T , \mathbf{K}_T , \mathbf{C}_T odbywa się poprzez wstawianie odpowiednich bloków z macierzy \mathbf{M}_k^e , \mathbf{K}_k^e , \mathbf{C}_k^e (bloków związanych ze stopniami swobody węzła początkowego i oraz węzła końcowego j) do globalnych macierzy na podstawie wektorów alokacji.

Należy jeszcze wspomnieć, iż macierze \mathbf{M}_T , \mathbf{K}_T , \mathbf{C}_T nie składają się z wydzielonych bloków o rozmiarze $N_T \times N_T$. Poszczególne podbloki macierzy \mathbf{M}_k^e , \mathbf{K}_k^e , \mathbf{C}_k^e występują zarówno dla numerów stopni swobody $n_s < N$, jak i $N < n_s < N + N_t$.

6. Podsumowanie

W literaturze bardzo często buduje się od podstaw równania ruchu układu z dołączonymi WSTM. Dla każdego przykładu obliczeniowego prowadzona jest cała analiza postaci macierzy globalnych \mathbf{M} , \mathbf{K} , \mathbf{C} . Takie podejście możemy znaleźć w pracach: Xu i in. [7], Lewandowski i Grzymińska [4]. Zastosowanie elementów TD-SMR-2D(3D), umożliwia potraktowanie problemu jako standardowego problemu MES, w którym są wykorzystywane nowe elementy. Wprowadzenie tych elementów umożliwia analizowanie układów, do których dołączono TD o kierunkach działania niekoniecznie zgodnych z globalnymi kierunkami X, Y, Z. Ma to bardzo duże znaczenie praktyczne dla układów o bardzo skomplikowanej geometrii oraz skomplikowanych formach drgań, gdzie może zająć konieczność zastosowania TD na kierunku nie zgodnym z osiami globalnego układu współrzędnych XYZ.

Literatura

- [1] Błazik-Borowa E., Podgórski J., *Wprowadzenie do metody elementów skończonych w statyce konstrukcji inżynierskich*, IZT, Lublin 2001.
- [2] Caughey T. K. , O'Kelly M. E. J., *Classical normal modes in damped linear dynamic systems*, Journal of Applied Mechanics, 32 (1965) 583–588.
- [3] Lewandowski R., *Dynamika konstrukcji budowlanych*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, 2006.
- [4] Lewandowski R., Grzymińska J., *Dynamic analysis of structures with multiple tuned mass dampers*, Journal of Civil Engineering and Management, 5(1) (2009) 77–86.
- [5] Rakowski G. i inni, *Mechanika budowli: ujęcie komputerowe*, tom 2, Arkady, Warszawa 1992.
- [6] Wielgos P., *Ocena skuteczności działania wielokrotnych, strojonych tłumików masowych w konstrukcjach budowlanych*, Rozprawa doktorska, Lublin 2010.
- [7] Xu Y.L., He Q., Ko J.M., *Dynamic response of damper-connected adjacent buildings under earthquake excitation*, Engineering Structures, 21(2) (1999) 135–148.

The equations of motion of the main structure with attached dampers described by standard rheological model

Piotr Wielgos

*Department of Structural Mechanics, Faculty of Civil Engineering and Architecture,
Lublin University of Technology, e-mail: p.wielgos@pollub.pl*

Abstract: A mathematical model of structure with multiple tuned mass dampers (MTMD) is presented in this paper. An important difficulty, connected with these model, is building a global damping matrix of the system. The own proposals of FEM elements describing additional elements attached to the main system in the form of tuned dampers are presented here. The benefits of the new FEM elements are briefly discussed.

Keywords: multiple tuned mass dampers, global damping matrix, FEM elements.