

# **Analiza numeryczna niesprężystych belek żelbetowych z betonu wysokiej wytrzymałości o niskim stopniu zbrojenia**

**Piotr Smarzewski**

*Politechnika Lubelska, Wydział Inżynierii Budowlanej i Sanitarnej,  
Katedra Konstrukcji Budowlanych,  
ul. Nadbystrzycka 40, 20-618 Lublin, e-mail: p.smarzewski@pollub.pl*

**Streszczenie:** W artykule przedstawiono analizę wyężenia zginanych belek żelbetowych wykonanych z betonu wysokiej wytrzymałości o niskim stopniu zbrojenia. Modelowanie deformacji elementów pod obciążeniem statycznym do zniszczenia włącznie z uwzględnieniem nieliniowości fizycznych betonu i stali zbrojeniowej przeprowadzono z wykorzystaniem zasad metody elementów skończonych. W celu zweryfikowania przyjętych modeli materiałów konstrukcyjnych wyniki analiz numerycznych przedstawiono na tle wyników eksperymentalnych dostępnych w literaturze.

**Słowa kluczowe:** metoda elementów skończonych, elementy żelbetowe, belki.

## **1. Wprowadzenie**

W ostatnich latach wraz z większą wydajnością systemów obliczeniowych oraz możliwością ich zastosowania w procesie analizy i projektowania konstrukcji inżynierskich nastąpił intensywny rozwój metod numerycznych używanych w zakresie obliczeń statycznych, wymiarowania i analizy zachowania konstrukcji aż do osiągnięcia przez nią stanów granicznych. Metody numeryczne są jedyną drogą do uzyskania praktycznie przydatnych rozwiązań w analizie złożonych ustrojów przestrzennych wykonanych z materiałów nie podlegających prawom liniowej sprężystości.

Ze wszystkich metod numerycznych najczęściej stosowana jest Metoda Elementów Skończonych, która stała się podstawowym narzędziem analizy w bardzo wielu dziedzinach naukowych i praktyce inżynierskiej. Polega ona na podziale kontinuum o nieskończonej liczbie punktów na skończoną liczbę elementów połączonych ze sobą w węzłach. Wszystkie zmienne w równaniu zagadnienia wyraża się przez przemieszczenia punktów węzłowych wyznaczone z układu równań algebraicznych. Wymaga to sformułowania zależności geometrycznych oraz przyjęcia związków konstytutywnych uzależniających składowe stanu naprężenia i odkształcenia. We współczesnym piśmiennictwie jest wiele monografii i artykułów poświęconych tej metodzie. Do podstawowych prac w tym zakresie należą monografie Zienkiewicza i Taylora [17], Crisfielda [6], Bathe [2], Kleibera [9], Boneta i Wooda [3].

Analiza wyężenia elementów konstrukcyjnych jest ważnym zagadnieniem mechaniki konstrukcji, szczególnie w odniesieniu do materiałów kruchych, gdyż

umożliwia ocenę jej bezpieczeństwa i optymalne projektowanie. Zwiększenie nośności elementów konstrukcyjnych wykonanych z materiałów kruchych uzyskuje się przez zastosowanie zbrojenia w postaci wiotkich prętów stalowych rozłożonych w materiale matrycy elementu w tych strefach, w których występują naprężenia rozciągające wywołujące zarysowanie materiału.

Dynamiczny rozwój techniki komputerowej stworzył również możliwości wykonania analiz nieliniowych dotyczących żelbetowych układów konstrukcyjnych ze szczególnym uwzględnieniem zróżnicowanych sprężysto-plastycznych charakterystyk materiałowych: betonu i stali, rzeczywistego układu zbrojenia, wzajemnej współpracy obu materiałów oraz symulacji mechanizmu zniszczenia elementów konstrukcyjnych. Jak dowiodła praktyka inżynierska, zrealizowane dotychczas konstrukcje z betonu, zaprojektowane bez wspomaganie komputerowego, spełniają najczęściej swoje zadanie i nie uległy awariom, niemniej jednak różne wpływy fizyczne, takie jak skurcz, oddziaływania termiczne, naprężenia przyczepności i pełzanie lub geometryczne, takie jak złożony układ konstrukcyjny były oceniane w dużym stopniu jedynie na podstawie intuicji inżynierskiej. Prowadziło to często do znacznego przewymiarowania konstrukcji w celu zapewnienia im wymaganego bezpieczeństwa oraz odpowiednich walorów użytkowych.

Analiza zachowania belek żelbetowych wykonanych z betonu o wysokiej wytrzymałości była przedmiotem wielu prac doświadczalnych m.in. Taerwe [15], Pecce i Fabbrocino [11], Rashida i Mansura [12]. W kraju podstawową pracą w tym zakresie jest praca Kamińskiej [8], będąca źródłem wzorcowych wyników, do których odnoszone są własne rozwiązania teoretyczne.

Beton wysokowartościowy, czyli beton o wysokiej wytrzymałości i jednocześnie wysokiej szczelności, zawiera wszystkie składniki już wcześniej stosowane do betonów, ale dozowane w innych proporcjach. Szczegółowe informacje dotyczące klasyfikacji i właściwości tych kompozytów materiałowych na bazie cementu zostały przedstawione w monografii Aitcina [1]. Niewątpliwie zastosowanie betonów wysokowartościowych w budownictwie będzie stale wzrastało zarówno ze względu na jego wysoką wytrzymałość, jak i na wysoki moduł sprężystości. Ponadto w bardzo wielu praktycznych zastosowaniach olbrzymie znaczenie ma wysoka odporność betonu wysokowartościowego na wpływy klimatyczne i oddziaływanie agresywnego środowiska związana z jego bardzo wysoką szczelnością. Specyficzne cechy betonów wysokowartościowych skłaniają ku konieczności podjęcia nie tylko badań doświadczalnych, ale również teoretycznych badań z zakresu konstytutywnego modelowania właściwości materiałowych, w szczególności modelowania zachowania zbrojonych elementów konstrukcyjnych oraz analizy mechanizmów wyciężenia i zniszczenia konstrukcji wykonanych z takiego materiału.

Przedmiotem pracy są belki żelbetowe z betonu wysokiej wytrzymałości traktowane jako kompozycja materiałowa składająca się z matrycy betonowej wzmocnionej wiotkimi prętami stalowymi rozłożonymi dyskretnie w materiale matrycy.

Głównym celem pracy jest modelowanie mechanizmów zniszczenia belek żelbetowych obciążonych statycznie, procesów statycznego odkształcania belek żelbetowych wykonanych z betonu wysokiej wytrzymałości z uwzględnieniem nieliniowości fizycznych materiałów konstrukcyjnych betonu i stali zbrojeniowej.

Osiągnięcie tego celu wymagało zrealizowania celów szczegółowych, do których należą:

- opracowanie własnego modelu teoretycznego betonu dla materiału sprężysto-plastycznego z uwzględnieniem osłabienia materiałowego przy ściskaniu i rozciąganiu,
- opracowanie oryginalnych analiz zachowania przestrzennych belek żelbetowych z betonu wysokiej wytrzymałości pod obciążeniem statycznym,
- opracowanie efektywnej metody obliczeniowej długości łuku Crisfielda w analizach niezwykle gwałtownych procesów zniszczenia: zarysowania i miażdżenia w celu dokładniejszego oszacowania pokrytycznego zachowania elementów konstrukcyjnych.

Zakres pracy obejmuje rozważania dotyczące modelowania niesprężystych właściwości materiałów, modelowania procesów odkształcania przestrzennych ustrojów konstrukcyjnych oraz opracowanie rozwiązań numerycznych.

## 2. Modelowanie właściwości materiałów konstrukcyjnych

### 2.1. Modelowanie właściwości betonu

#### 2.1.1. Pięcioparametrowa powierzchnia graniczna betonu

Powierzchnię graniczną betonu przedstawiono za pomocą modelu pięcioparametrowego Willama i Warnke [16]. W celu opisanego parabolicznego kształtu południków powierzchni granicznej model trójparametrowy uzupełniono o dodatkowe dwa parametry. Kryterium zniszczenia betonu w złożonym stanie naprężenia opisano wyrażeniem:

$$\frac{F}{f_c} - S \geq 0 \tag{1}$$

w którym:  $F$  – funkcja stanu naprężeń  $\sigma_{xp}, \sigma_{yp}, \sigma_{zp}$  działających w kierunkach prostokątnego układu współrzędnych  $x, y, z$ ,  $S$  – powierzchnia graniczna zależna od naprężeń głównych  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , gdzie:  $\sigma_1 = \max(\sigma_{xp}, \sigma_{yp}, \sigma_{zp})$ ,  $\sigma_3 = \min(\sigma_{xp}, \sigma_{yp}, \sigma_{zp})$  i  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  oraz pięciu parametrów:  $f_c$  – wytrzymałości na ściskanie w jednoosiowym stanie naprężenia (wywołującej miażdżenie),  $f_t$  – wytrzymałości na rozciąganie w jednoosiowym stanie naprężenia (wywołującej zarysowanie),  $f_{cb}$  – wytrzymałości w stanie dwuosowego ściskania (wywołującej miażdżenie),  $f_1$  – wytrzymałości w stanie dwuosowego ściskania nałożonej w stanie naprężenia hydrostatycznego  $\sigma_h^a$  oraz  $f_2$  – wytrzymałości w stanie jednoosiowego ściskania nałożonej w stanie naprężenia hydrostatycznego  $\sigma_h^a$ .

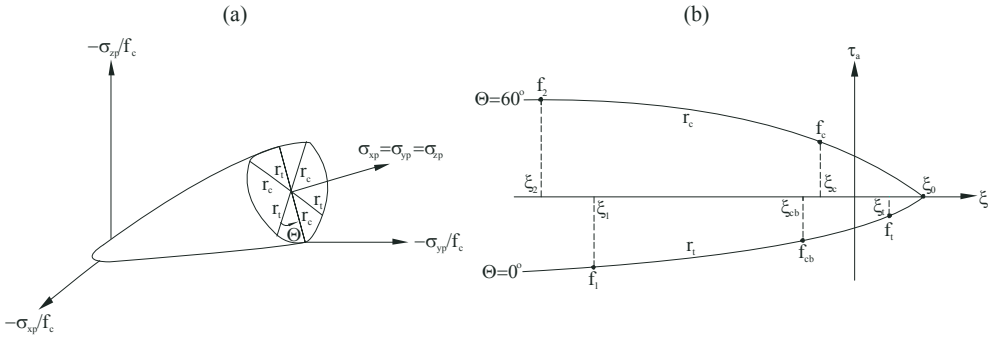
Powierzchnia graniczna betonu jest wykorzystywana jako kryterium zniszczenia zgodnie z następującą interpretacją. Materiał znajduje się w stanie zniszczenia, gdy nierówność (1) jest spełniona. Jako stany zniszczenia rozróżnia się stan zarysowania, jeżeli dowolne naprężenie główne jest rozciągające, oraz stan zmiżdżenia, gdy wszystkie naprężenia główne są ściskające. Powierzchnia graniczna  $S$  jest definiowana przez pięć parametrów wytrzymałościowych  $f_c, f_t, f_{cb}, f_1, f_2$  i stan hydrostatycznego naprężenia  $\sigma_h^a$ .

Opis zniszczenia betonu określa się w czterech zakresach stanu naprężenia:

1.  $0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  (ściskanie-ściskanie-ściskanie),
2.  $\sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  (rozciąganie-ściskanie-ściskanie),
3.  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0 \geq \sigma_3$  (rozciąganie-rozciąganie-ściskanie),
4.  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$  (rozciąganie-rozciąganie-rozciąganie).

W każdym zakresie stanu naprężenia, niezależne funkcje  $F_1, F_2, F_3, F_4$  i  $S_1, S_2, S_3, S_4$  opisują odpowiednio funkcję stanu naprężeń  $F$  i powierzchnię graniczną  $S$ . Funkcje te szczegółowo opisano w pracach [13, 14] w każdym zakresie stanu naprężenia.

Powierzchnię graniczną i interpretację graficzną promieni przekroju dewiatorowego  $r_t, r_c$  w zależności od parametrów wytrzymałościowych  $\xi$  i kąta Lodego  $\theta$  przedstawiono na Rys. 1.



Rys. 1. Konstrukcja powierzchni granicznej: (a) w obszarze naprężeń głównych i (b) w przekroju hydrostatycznym.

Fig. 1. Spatial failure surface: (a) in principal stress space and (b) in hydrostatic section.

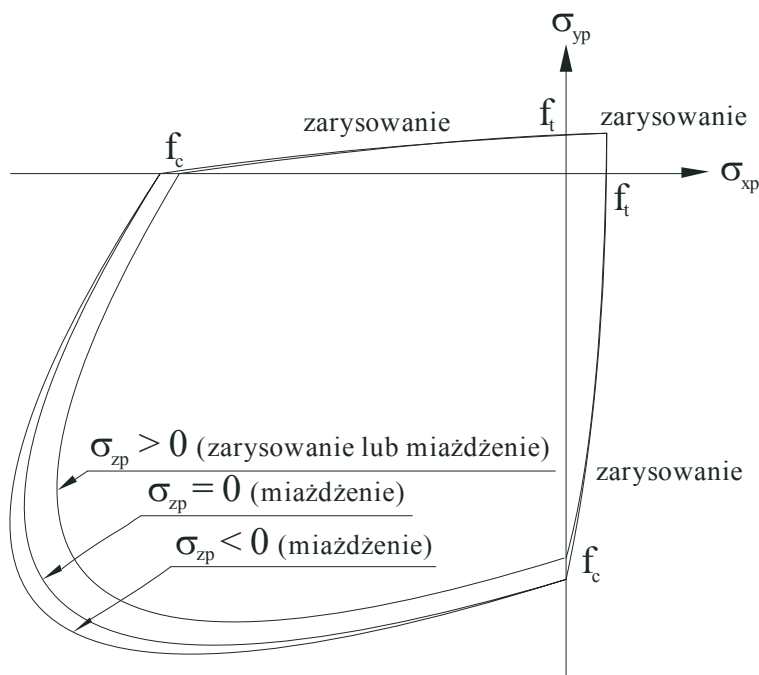
Promień przekroju dewiatorowego  $r_t$  jest określony przez parametry  $a_0, a_1, a_2$  dobrane w taki sposób, aby  $f_t, f_{cb}, f_1$  leżały na powierzchni granicznej. Promień przekroju dewiatorowego  $r_c$  jest wyrażony przez parametry  $b_0, b_1, b_2$  określone na podstawie zależności zachodzących wzdłuż południka ściskania przy  $\theta = 60^\circ$ . Wartości  $f_1, f_2$  dobrano na poziomie stanu hydrostatycznego naprężenia dla konstrukcji rzeczywistej  $\sigma_h^a$ . Powierzchnia graniczna jest wypukła, jeśli wartości parametrów spełniają silnie ograniczające nierówności:

$$\begin{aligned}
 a_0 &> 0, a_1 \leq 0, a_2 \leq 0 \\
 b_0 &> 0, b_1 \leq 0, b_2 \leq 0 \\
 0,5 &< \frac{r_t}{r_c} < 1,25
 \end{aligned} \tag{2}$$

Model powierzchni granicznej opisany powyżej łatwo redukuje się do prostszych modeli powierzchni granicznych: cylindra Misesa, gdy:  $a_0 = b_0$ ,  $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$ , stożka Druckera-Pragera, gdy:  $a_0 = b_0$ ,  $a_1 = b_1$ ,  $a_2 = b_2 = 0$ ,

stożka z nieobrotową podstawą, gdy:  $\frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1}{b_1}$ ,  $a_2 = b_2 = 0$  lub stożka z krzywoliniowymi tworzącymi i nieobrotową podstawą, gdy:  $\frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ . Wartości parametrów charakteryzujących ten model są łatwe do wyznaczenia na podstawie standardowych prób wytrzymałościowych. Zawiera on wszystkie trzy niezmienniki naprężeń w równoważnej formie naprężeń średnich  $\sigma_h, F$  i kąt Lodego  $\theta$ .

Na Rys. 2 przedstawiono powierzchnię graniczną w dwuosiowym stanie naprężenia po rzutowaniu na płaszczyznę  $\sigma_{xp} - \sigma_{yp}$  w obszarze największych niezerowych naprężeń normalnych  $\sigma_{xp}, \sigma_{yp}$ . Stany bezpiecznej pracy materiału znajdują się wewnątrz tej powierzchni, której ewolucja będzie reprezentować wzmocnienie lub osłabienie materiałowe. Osiągnięcie przez ścieżkę naprężenia powierzchni granicznej skutkuje wzrostem odkształceń bez zmiany naprężenia lub osłabieniem materiałowym opisującym spadek naprężeń. Na powierzchni granicznej natomiast są położone punkty odpowiadające zniszczeniu w funkcji znaku naprężenia normalnego  $\sigma_{zp}$  w kierunku z. Fizycznie niemożliwy jest stan, któremu odpowiada punkt położony na zewnątrz ograniczonego obszaru. Jeżeli w kierunkach x, y występuje ściskanie ( $\sigma_{xp} < 0, \sigma_{yp} < 0$ ), a w kierunku z rozciąganie ( $\sigma_{zp} > 0$ ), to rysa powstanie w płaszczyźnie prostopadłej do naprężenia rozciągającego  $\sigma_{zp}$ . Materiał zostanie zmiażdżony, gdy wartość naprężenia normalnego jest nieznacznie mniejsza lub równa zero ( $\sigma_{zp} \leq 0$ ). Moduł sprężystości zmiażdżonego elementu materiału matrycy betonowej we wszystkich kierunkach jest równy zero.



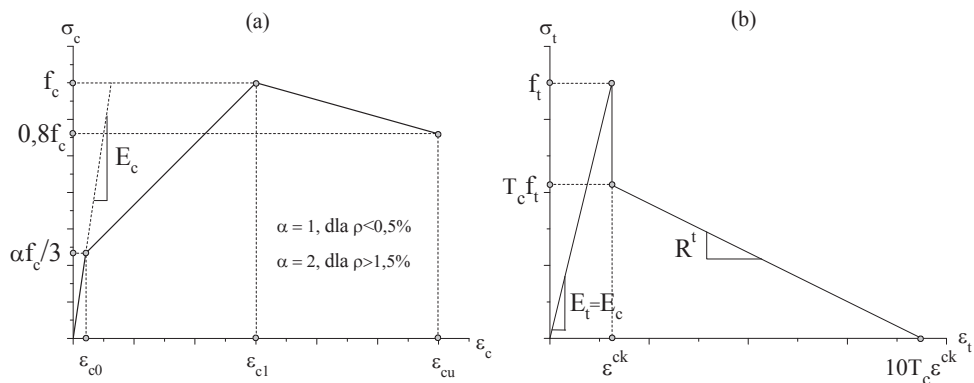
Rys. 2. Powierzchnia graniczna w obszarze naprężeń normalnych w dwuosiowym stanie naprężenia.

Fig. 2. Failure surface in principal stress space with biaxial stress.

### 2.1.2. Propozycja własna prawa ewolucji powierzchni granicznej w przestrzeni naprężeń

Równania opisujące krzywą zależności pomiędzy odkształceniami i naprężeniami są bardzo użyteczne w zastosowaniach do analizy konstrukcji. Interpretując wyniki analiz numerycznych belek żelbetowych z betonu o wysokiej wytrzymałości zauważono, że zastosowanie proponowanych literaturowych równań opisujących zależności pomiędzy odkształceniami i naprężeniami prowadzi do znacznego zmniejszenia granicznych ugięć konstrukcji. Mniejsze krzywizny graniczne oznaczają zmniejszenie możliwości redystrybucji sił wewnętrznych w konstrukcji, niekorzystne z punktu widzenia jej bezpieczeństwa.

Na Rys. 3 na podstawie przeprowadzonych doświadczeń numerycznych belek żelbetowych w konfrontacji z wynikami doświadczalnymi belek żelbetowych przedstawionymi w pracy Kamińskiej [8] zaproponowano własną koncepcję zachowania betonu o wysokiej wytrzymałości w stanie jednoosiowego ściskania i rozciągania w konstrukcji żelbetowej. Istotą własnej zależności naprężenie-odkształcenie dla betonu jest uwzględnienie w stanie jednoosiowego ściskania fazy sprężysto-plastycznego wzmocnienia i fazy osłabienia materiałowego oraz potwierdzonej doświadczalnie m.in. przez Pecce, Fabbrocino [11] i Kamińską [8] obserwacji o znacznie większych wartościach granicznych odkształceń uzyskanych w konstrukcjach niż na próbkach, związanych ze zbrojeniem konstrukcji i efektem skali.



Rys. 3. Propozycja zależności naprężenie-odkształcenie dla betonu: (a) w stanie jednoosiowego ściskania, (b) w stanie jednoosiowego rozciągania.

Fig. 3. Proposal stress-strain relationship for concrete: (a) in uniaxial compression, (b) in uniaxial tension.

Zakres fazy sprężystej w betonie przy ściskaniu jest uzależniony od stopnia zbrojenia konstrukcji i wytrzymałości betonu. Dla betonu o wysokiej wytrzymałości przy wysokim stopniu zbrojenia większym od 1,5 % założono liniowy przebieg funkcji naprężenie-odkształcenie przy ściskaniu do ok. 70 % wartości granicznej wytrzymałości na ściskanie  $f_c$ . Związany jest on również z bardziej sztywnym zachowaniem betonu wysokowartościowego niż betonu zwykłego z powodu większej wytrzymałości warstwy kontaktowej kruszywo-matryca i mniejszą ilością mikrospękań. Powyżej występuje faza sprężysto-plastycznego wzmocnienia matrycy betonowej z liniowym przyrostem naprężenia do granicznej wytrzymałości na ściskanie  $f_c$ . Po jej osiągnięciu beton ulega osłabieniu do 80 % wartości granicznej

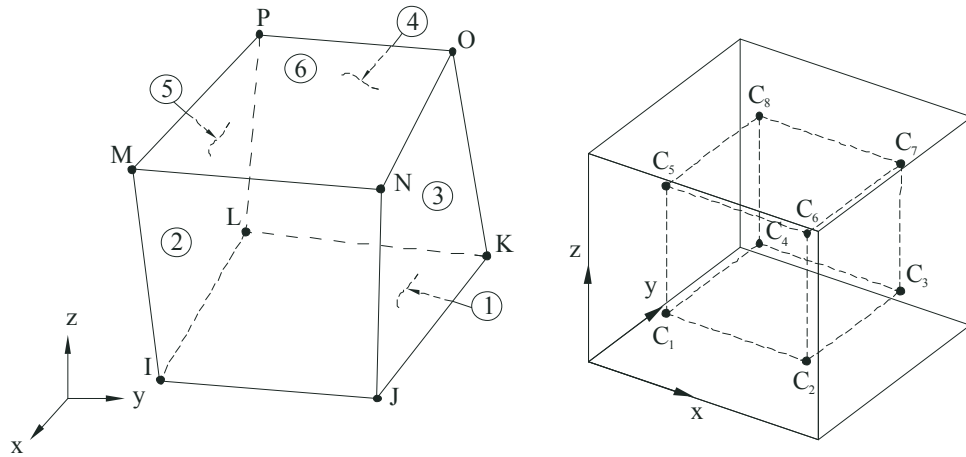
wytrzymałości na ściskanie przy granicznym odkształceniu  $\varepsilon_{cu}$ , a gałąź krzywej opada łagodnie w obszarze osłabienia materiałowego.

W wielu modelach powstałych w oparciu o badania próbek opadająca część krzywej jest tym mocniej nachylona im wyższa jest wytrzymałość betonu, co świadczy o większej kruchości betonu wysokiej wytrzymałości. Ta prawidłowość nie zawsze jednak znajduje odzwierciedlenie w zachowaniu betonu w żelbetowych elementach konstrukcyjnych. Ponadto wyniki badań doświadczalnych wykazały, że obawy o niską odkształcalność betonu wysokiej wytrzymałości w elementach konstrukcyjnych są nieuzasadnione. W badaniach Kamińskiej [8] stwierdzono, że w tych elementach, które uległy zniszczeniu przez zmiążdżenie betonu strefy ściskanej, odkształcenia betonu osiągały aż 6 ‰ i były dwukrotnie wyższe niż odkształcenia niszczące rejestrowane na próbkach, co jest korzystne z punktu widzenia bezpieczeństwa konstrukcji. Przyjęcie zbyt małych możliwości odkształcania się betonu wysokiej wytrzymałości przy ściskaniu, jak np. w zaleceniach Model Code 90 [4], powoduje znaczne zmniejszenie granicznych krzywizn elementów konstrukcyjnych. Z tych powodów w modelu do analiz konstrukcji żelbetowych zaproponowano większą możliwość odkształcania się betonu przy ściskaniu. Założono odkształcenia  $\varepsilon_{c1}$  odpowiadające granicznej wytrzymałości na ściskanie  $f_c$  równe 6 ‰, a odkształcenia graniczne przy ściskaniu  $\varepsilon_{cu}$  równe 12 ‰.

Krzywa naprężenie-odkształcenie dla betonu przy rozciąganiu ma przebieg liniowy do granicznej wytrzymałości na rozciąganie  $f_t$ . Założono na podstawie pracy Lyndona i Balendrana [10], że moduł sprężystości przy rozciąganiu jest równy modułowi przy ściskaniu. Po osiągnięciu tej wartości powstają rysy w betonie i następuje kruchy spadek wytrzymałości związany z pękaniem do wartości większej lub równej 60 % granicznej wytrzymałości na rozciąganie. Wartość parametru  $T_c$  powinna być dobrana z przedziału zamkniętego  $T_c \in (0,6;1)$ . W wyniku przyrzeczności na odcinku między rysami beton przejmuje znaczące wielkości naprężeń rozciągających stal zbrojeniową i w konsekwencji konstrukcja żelbetowa zwiększa swoją sztywność. Taki efekt usztywnienia uwzględniono przez założenie stopniowego, łagodnego spadku wytrzymałości na rozciąganie do zera przy zniszczeniu betonu przy średnich odkształceniach równych: 0,8 ‰, gdy  $T_c = 0,6$  oraz 1,4 ‰, gdy  $T_c = 1$ .

### **2.1.3. Charakterystyka elementów skończonych materiału matrycy betonowej**

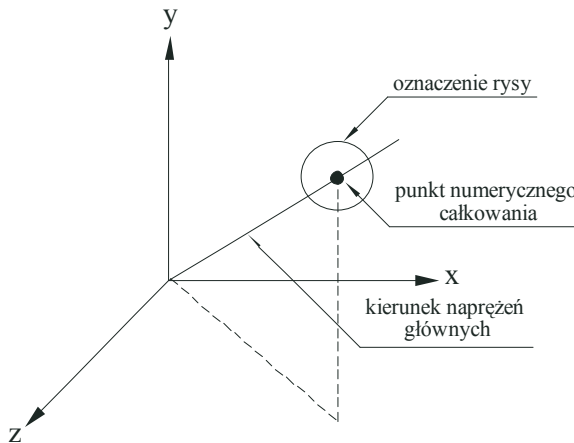
W analizie konstrukcji betonowych zastosowanie elementów sześciociennych jest korzystne ze względu na zazwyczaj ortogonalny przebieg zbrojenia. Element skończony materiału matrycy betonowej jest definiowany przez izotropowe właściwości materiału i osiem punktów węzłowych o trzech stopniach swobody w każdym z nich, to jest przemieszczenia w punktach węzłowych w kierunkach  $x, y, z$ . W każdym elemencie skończonym we wszystkich punktach numerycznego całkowania w trzech płaszczyznach lokalnego układu współrzędnych prostopadłych obliczane są odkształcenia i naprężenia. Schemat elementu skończonego i obliczeniowe punkty numerycznego całkowania przedstawiono na Rys. 4.



Rys. 4. Element skończony materiału matrycy betonowej i punkty numerycznego całkowania w tym elemencie.

Fig. 4. Finite element of the concrete matrix material and integration points in concrete solid element.

Założony model rysy rozmytej umożliwia opis zarysowania w każdym punkcie numerycznego całkowania na trzech kierunkach prostopadłych w przestrzeni naprężeń głównych. Rysa powstaje wtedy, gdy rozciągające naprężenie główne jest większe od wytrzymałości betonu na rozciąganie. W graficznej reprezentacji wyników zarysowanie jest przedstawione w postaci okręgu widocznego w kierunku prostopadłym do głównego naprężenia, jak zilustrowano na Rys. 5.



Rys. 5. Oznaczenie zarysowania.

Fig. 5. Cracking sign.

W następnej kolejności naprężenia styczne do płaszczyzny pierwszej rysy mogą wywołać drugą i trzecią rysę, która powstanie w punkcie numerycznego całkowania w kierunku prostopadłym do wywołującej ją odpowiedniej składowej naprężenia głównego. W stanie zarysowania lub zmiażdżenia betonu w elemencie skończonym jest dodawana mała wartość sztywności dla zachowania równowagi numerycznej.



### 2.1.4. Związki konstytutywne betonu

Macierz sprężystości  $[D^c]$  dla materiału izotropowego jest przedstawiona w postaci:

$$[D^c] = \frac{E_c}{(1 + \nu_c)(1 - 2\nu_c)} \begin{bmatrix} 1 - \nu_c & \nu_c & \nu_c & 0 & 0 & 0 \\ \nu_c & 1 - \nu_c & \nu_c & 0 & 0 & 0 \\ \nu_c & \nu_c & 1 - \nu_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu_c}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu_c}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1 - 2\nu_c}{2} \end{bmatrix} \quad (3)$$

gdzie:  $E_c$  – moduł sprężystości betonu,  $\nu_c$  – współczynnik Poissona.

W stanie zarysowania i miażdżenia macierz sztywności jest odpowiednio dostosowana do charakteru uszkodzenia. W modelowaniu numerycznym, w którym posługujemy się rozmytym obrazem rys, konieczne jest zastosowanie opisu uwzględniającego cechy betonu po powstaniu rys. Powstanie rysy w punkcie numerycznego całkowania opisuje zmodyfikowana macierz sztywności z wprowadzoną płaszczyzną osłabienia usytuowaną w kierunku prostym do powierzchni rysy. Parametr  $\beta_t$  jest mnożnikiem redukującym nośność na ścinanie przy obciążeniu wywołującym poślizg w płaszczyźnie prostopadłej do powierzchni rysy. Zależność między naprężeniem a odkształceniem dla materiału zarysowanego w jednej płaszczyźnie jest zapisana w postaci macierzowej:

$$[D_c^{ck}] = \frac{E_c}{1 + \nu_c} \begin{bmatrix} \frac{R^t (1 + \nu_c)}{E_c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \nu_c} & \frac{\nu_c}{1 - \nu_c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\nu_c}{1 - \nu_c} & \frac{1}{1 - \nu_c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_t}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_t}{2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

w której indeks  $ck$  opisuje macierz sztywności w układzie współrzędnych z osią  $x^{ck}$ , analogicznym z kierunkiem naprężeń głównych. Interpretację graficzną modułu osłabienia  $R^t$  i mnożnika sztywności strefy rozciąganej w fazie zarysowania  $T_c$  przy uwzględnieniu naprężeń relaksacyjnych po zarysowaniu przedstawiono na Rys. 3b.

Podczas zamykania się rysy w macierzy  $[D_c^{ck}]$  jest wprowadzony parametr ścinania  $\beta_c$ :

$$[D_c^{ck}] = \frac{E_c}{(1+\nu_c)(1-2\nu_c)} \begin{pmatrix} 1-\nu_c & \nu_c & \nu_c & 0 & 0 & 0 \\ \nu_c & 1-\nu_c & \nu_c & 0 & 0 & 0 \\ \nu_c & \nu_c & 1-\nu_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_c(1-2\nu_c)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu_c}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_c(1-2\nu_c)}{2} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Macierz sztywności dla betonu zarysowanego w dwóch i trzech płaszczyznach jest postaci:

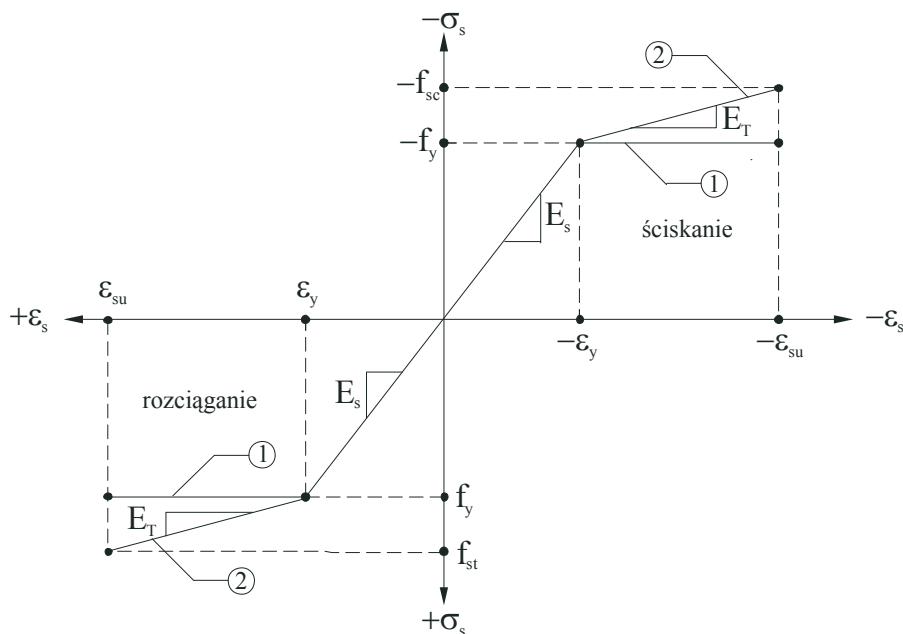
$$[D_c^{ck}] = E_c \begin{pmatrix} \frac{R^t}{E_c} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^t}{E_c} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_t}{2(1+\nu_c)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_t}{2(1+\nu_c)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_t}{2(1+\nu_c)} \end{pmatrix} \quad (6)$$

a w przypadku, gdy rysy zamykane są w dwóch i trzech płaszczyznach to zależność jest wyrażona w postaci macierzowej (5).

Rozwarcie lub zamknięcie rysy w punkcie numerycznego całkowania zależy od znaku odkształcenia przy zarysowaniu  $\varepsilon_{ck}^{ck}$ . Miażdżenie betonu w punkcie numerycznego całkowania powstaje, gdy ulega on zniszczeniu przy jednoosiowym, dwuosiowym lub trójosiowym ściskaniu. Miażdżenie w elemencie skończonym jest opisane zgodnie z założeniami teorii plastycznego płynięcia jako końcowy stan procesu osłabienia materiałowego przy ściskaniu.

## 2.2. Modelowanie właściwości stali zbrojeniowej

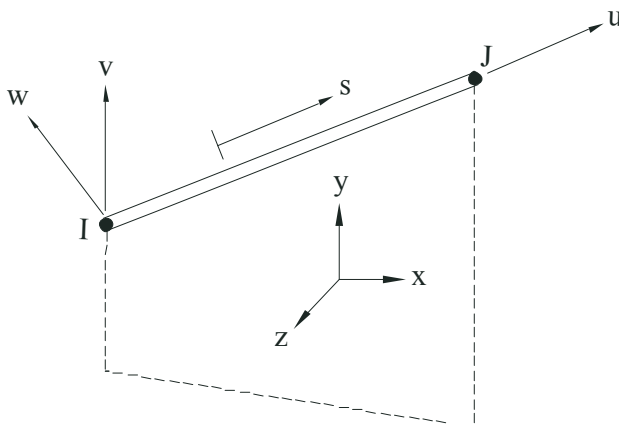
W konstrukcjach betonowych stal jest używana w postaci prętów zbrojeniowych. Upraszcza to znacznie problem modelu materiałowego stali do jednoosiowego stanu naprężenia. W obliczeniach numerycznych założono model materiałowy stali zbrojeniowej sprężysto-plastyczny o identycznych charakterystykach przy rozciąganiu i ściskaniu. Na Rys. 6 przedstawiono modele materiałowe stali zastosowane w analizie konstrukcyjnej ustrojów żelbetowych. Dla płyt stalowych usytuowanych w miejscach podparcia i przyłożenia siły skupionej założono model materiałowy liniowo-sprężysty.



Rys. 6. Wykresy naprężenie-odkształcenie dla stali zbrojeniowej zastosowane w analizach modelowych belek żelbetowych: linia 1 – materiał sprężysto – idealnie plastyczny, linia 2 – materiał sprężysto – plastyczny ze wzmocnieniem.

Fig. 6. Stress-strain curve for steel reinforcement used for the analyses' reinforced concrete beam models: line 1 – elastic – perfectly plastic material, line 2 – elastic – plastic material with hardening.

W modelowaniu stali zbrojeniowej zastosowano przestrzenny element prętowy zilustrowany na Rys. 7, posiadający dwa punkty węzłowe o trzech stopniach swobody.



Rys. 7. Element skończony stali zbrojeniowej.

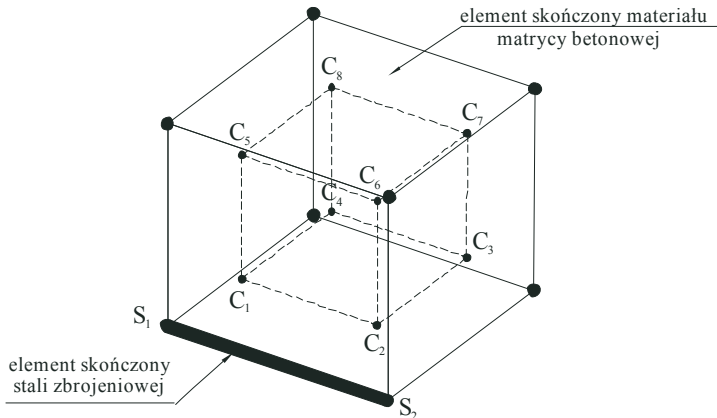
Fig. 7. Finite element of the steel reinforcement.

Sześciościenny element skończony stali zastosowany do modelowania płyt na podporze belki i w strefie przyłożenia siły skupionej odpowiada elementowi przedstawionemu na Rys. 4.

### 3. Metoda analizy

#### 3.1. Modele elementu żelbetowego

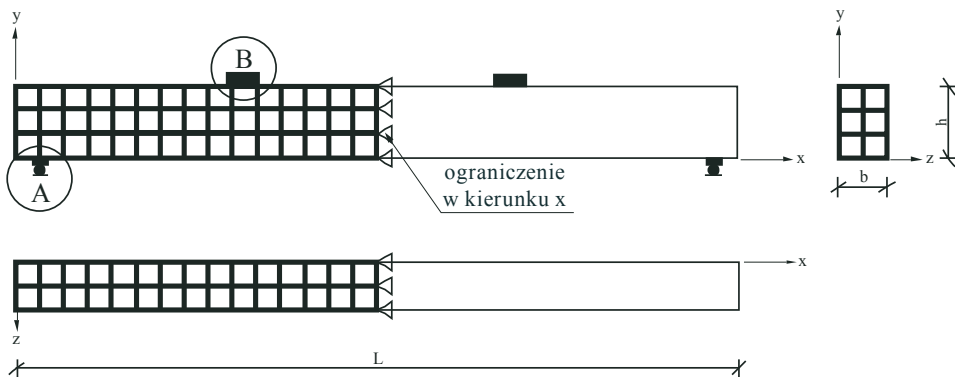
W modelowaniu belek zastosowano model zbrojenia dyskretnego w elemencie betonowym. Siatkę przestrzennych elementów skończonych prętów zbrojeniowych powiązano z siatką elementów skończonych matrycy betonowej poprzez modelowanie zgodności przemieszczeń węzłów wspólnych obydwu siatek, Rys. 8. Dla tak dyskretyzowanego ustroju macierz sztywności jest sumą sztywności elementów skończonych matrycy betonowej i sztywności elementów skończonych zbrojenia.



Rys. 8. Połączenie elementu skończonego z betonu z elementem stalowym.  
Fig. 8. Connectivity concrete solid and steel link finite elements.

#### 3.2. Warunki brzegowe i obciążenie zastępcze

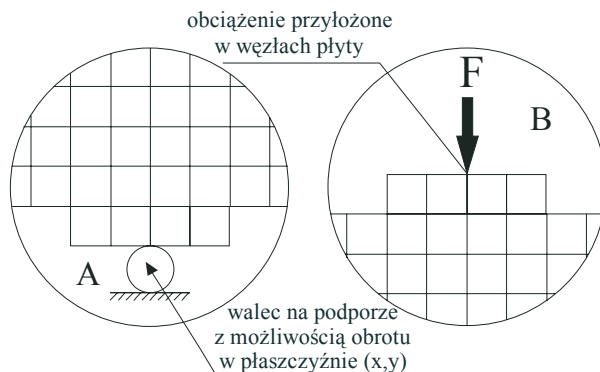
Warunki brzegowe wprowadzono w dwóch płaszczyznach symetrii belki. Na Rys. 9 przedstawiono warunki brzegowe w analizowanych modelach numerycznych.



Rys. 9. Warunki brzegowe w płaszczyznach symetrii dla ½ belki BP-1a.  
Fig. 9. Boundary conditions for planes of symmetry use of a ½ beam BP-1a.

Warunki brzegowe na podporach modelowano jako poziome płyty stalowe przekazujące siły węzłowe elementów materiału matrycy betonowej na poprzeczny

wątek stalowy umożliwiający obrót belki w płaszczyźnie zginania. Obciążenie siłą skupioną  $F$  jest przyłożone za pośrednictwem poziomej płyty stalowej. Przyjęto równomierny rozkład siły w węzłach w kierunku poprzecznej osi symetrii płyty stalowej. Przykładowe warunki na podporze i w strefie obciążenia zilustrowano na Rys. 10.



Rys. 10. Warunki brzegowe na podporze i w strefie przyłożenia obciążenia dla ½ belki BP-1a.  
 Fig. 10. Boundary conditions for support and at the loading plate use of a ½ beam BP-1a.

### 3.3. Metody numeryczne rozwiązania układu równań równowagi

#### 3.3.1. Metoda Newtona-Raphsona

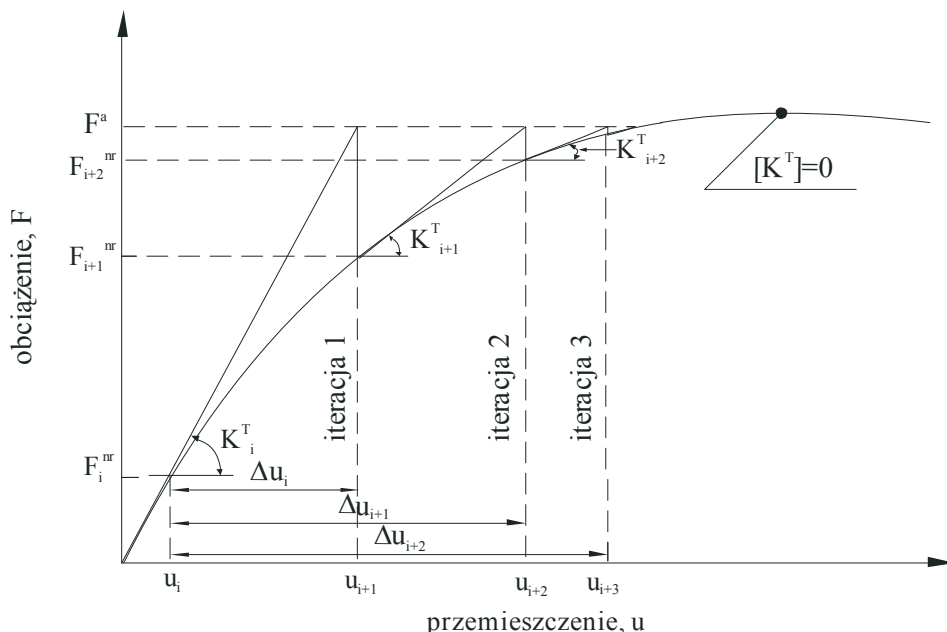
Metoda Newtona-Raphsona przedstawiona graficznie na Rys. 11 jest procesem iteracyjnego rozwiązywania równań nieliniowych postaci:

$$[K_i^T] \{\Delta u_i\} = \{F^a\} - \{F_i^{nr}\} \quad (7)$$

$$\{u_{i+1}\} = \{u_i\} + \{\Delta u_i\} \quad (8)$$

$[K_i^T]$  – macierz sztywności stycznej,  $i$  – indeks odpowiadający numerowi kroku przyrostowego,  $\{F_i^{nr}\}$  – wektor wewnętrznych sił węzłowych odpowiadających stanowi naprężenia panującemu w dyskretyzowanym układzie.

Macierz  $[K_i^T]$  i wektor  $\{F_i^{nr}\}$  obliczono na podstawie wartości wektora przemieszczenia  $\{u_i\}$ .



Rys. 11. Metoda Newtona-Raphsona.

Fig. 11. Newton-Raphson solution.

### 3.3.2. Metoda Newtona-Raphsona ze spadkiem adaptacyjnym

Metoda spadku adaptacyjnego przedstawiona w pracy Eggerta i in. [7] polega na zmianie ścieżki rozwiązania w pobliżu punktu granicznego i poruszaniu się wstecz wzdłuż siecznej aż do szybkiego uzyskania zbieżności rozwiązania numerycznego.

Macierz sztywności w równaniu Newtona-Raphsona (7) jest opisana jako suma dwóch macierzy:

$$[K_i^T] = \xi [K^S] + (1 - \xi) [K^T] \quad (9)$$

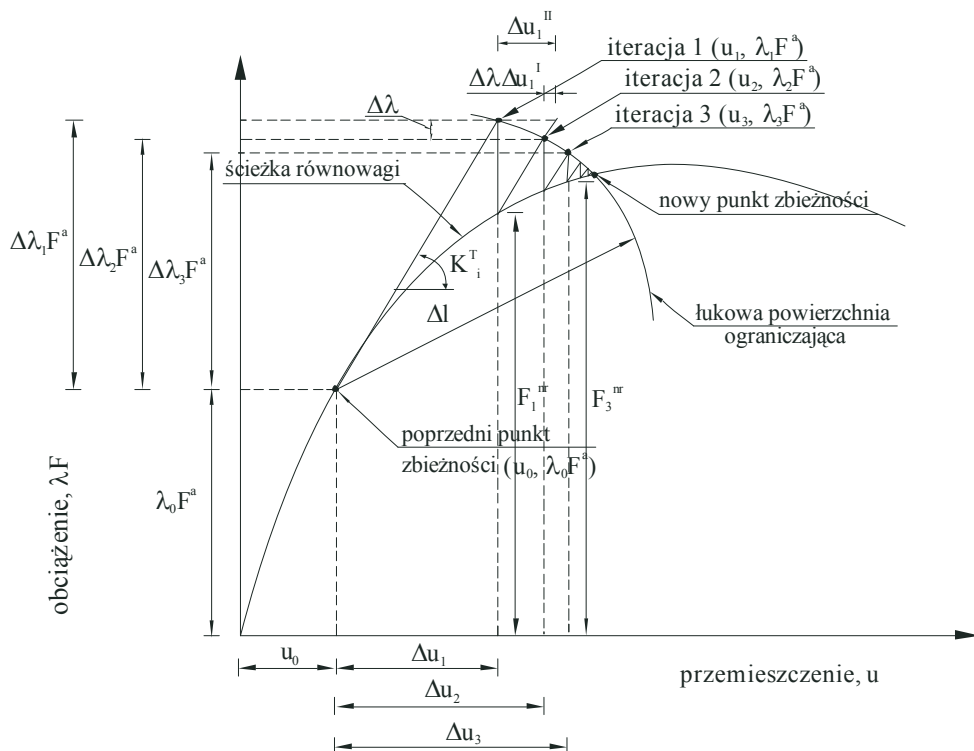
$[K^S]$  – macierz sztywności siecznej,  $[K^T]$  – macierz sztywności stycznej,  $\xi$  – parametr spadku adaptacyjnego.

Metoda polega na uzgodnieniu parametru spadku adaptacyjnego  $\xi$  podczas iteracji równowagi. Macierz sztywności siecznej jest generowana w metodzie numerycznej w wyniku rozwiązywania nieliniowych zagadnień dotyczących uplastycznienia materiału, sztywności konstrukcji z dużymi odkształceniami, zmiażdżenia betonu z uwzględnieniem naprężeń relaksacyjnych po zarysowaniu.

### 3.3.3. Metoda Crisfielda

W przedstawionej na Rys. 12 metodzie numerycznej długości łuku Crisfielda równanie (7) uzależniono od parametru obciążenia  $\lambda$ :

$$[K_i^T] \{ \Delta u_i \} = \lambda \{ F^a \} - \{ F_i^{nr} \} \quad (10)$$



Rys. 12. Metoda długości łuku Crisfielda [5].

Fig. 12. Crisfield arc-length method [5].

W metodzie tej zmienny parametr obciążenia  $\lambda$  poszukiwany w równaniach równowagi w procedurze elementów skończonych jest wprowadzony z przedziału  $\langle -1, 1 \rangle$ . Równanie w pośrednim kroku obciążenia jest postaci:

$$[K_i^T] \{ \Delta u_i \} - \Delta \lambda \{ F^a \} = (\lambda_0 + \Delta \lambda_i) \{ F^a \} - \{ F_i^{nr} \} \quad (11)$$

$\Delta \lambda$  – parametr przyrostu obciążenia.

Na podstawie równania (11) poszukiwany wektor przyrostu przemieszczenia  $\{ \Delta u_i \}$  złożony z dwóch składowych opisano jako:

$$\{ \Delta u_i \} = \Delta \lambda \{ \Delta u_i^I \} + \{ \Delta u_i^{II} \} \quad (12)$$

$\{ \Delta u_i^I \}$  – wektor przyrostu przemieszczenia wywołany jednostkowym parametrem obciążenia,  $\{ \Delta u_i^{II} \}$  – wektor przyrostu przemieszczenia w metodzie Newtona-Raphsona.

Parametr przyrostu obciążenia  $\Delta \lambda$  określono wg równania długości łuku:

$$l_i^2 = \Delta\lambda_i^2 + \beta^2 \{\Delta u_n\}^T \{\Delta u_n\} \quad (13)$$

$\beta$  – parametr skalowania,  $\Delta u_n$  – suma przyrostów przemieszczenia  $\Delta u_i$  w bieżącym kroku iteracyjnym.

Obliczenia parametru  $\Delta\lambda$  przeprowadzono w oparciu o zasadę prostopadłości:

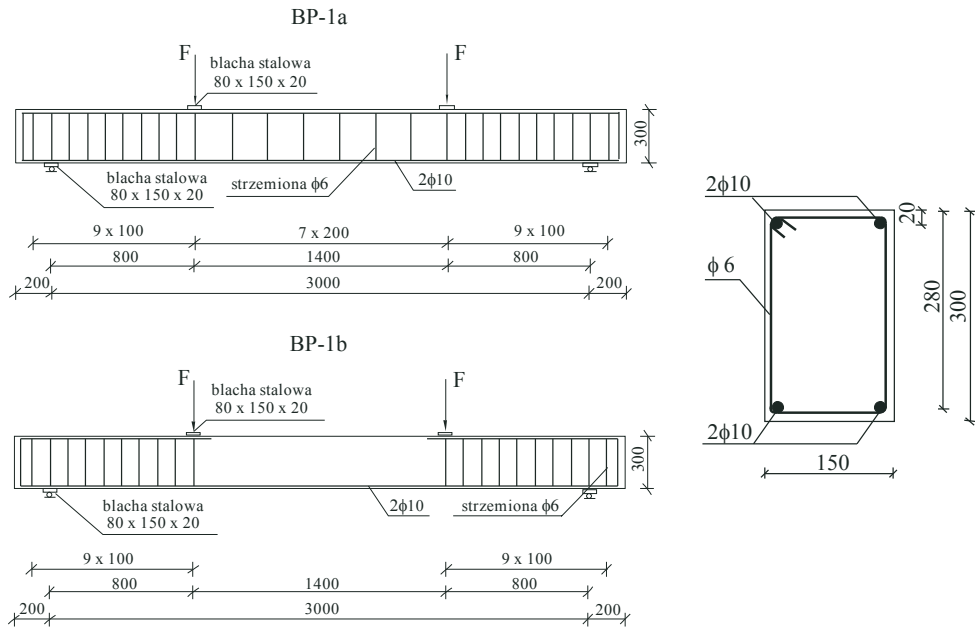
$$\Delta\lambda = \frac{r_i - \{\Delta u_n\}^T \{\Delta u_i^{\text{II}}\}}{\beta^2 \Delta\lambda_i + \{\Delta u_n\}^T \{\Delta u_i^{\text{I}}\}} \quad (14)$$

$r_i$  – niezrównoważony parametr otrzymywany w wyniku skalarnego mnożenia wektora normalnego i stycznego.

#### 4. Doświadczenia numeryczne belek żelbetowych z betonu o wysokiej wytrzymałości

W numerycznych modelach przestrzennych belek żelbetowych z betonu o wysokiej wytrzymałości zastosowano wymiary elementów oraz właściwości materiałów jak dla wolnopodpartych belek prostokątnych BP-1a, BP-1b badanych przez Kamińską. Wszystkie elementy wykonano z betonu o wytrzymałości  $f_c = 70\text{-}80$  MPa.

Wymiary i przekrój poprzeczny belek wraz z układem zbrojenia i schematem obciążenia przedstawiono na Rys. 13.



Rys. 13. Wymiary i przekrój poprzeczny belek BP-1 wraz z układem zbrojenia i schematem obciążenia.

Fig. 13. Dimensions and cross-section of BP-1 beams with reinforcement and loading arrangements.



Właściwości materiałów konstrukcyjnych ustalone doświadczalnie przez Kamińską określają następujące parametry modeli konstytutywnych podane w kolejności dla belek BP-1a, BP-1b:

#### BETON WYSOKIEJ WYTRZYMAŁOŚCI

- wytrzymałość na ściskanie w jednoosiowym stanie naprężenia  $f_c = 81,2$  MPa, 72,8 MPa,
- moduł sprężystości  $E_c = 35300$  MPa, 34000 MPa,
- wytrzymałość na rozciąganie w jednoosiowym stanie naprężenia  $f_t = 5,23$  MPa, 4,73 MPa,
- współczynnik Poissona  $\nu_c = 0,15$ ,
- gęstość betonu  $\rho_c = 2600$  kg/m<sup>3</sup>,
- graniczne odkształcenia w fazie wzmocnienia sprężysto-plastycznego  $\varepsilon_{c1} = 6$  ‰,
- graniczne odkształcenia w fazie osłabienia  $\varepsilon_{cu} = 12$  ‰,
- parametr nośności na ścinanie dla rozwarcia rys  $\beta_t = 0,5$ ,
- parametr nośności na ścinanie dla zamknięcia się rys  $\beta_c = 0,99$ .

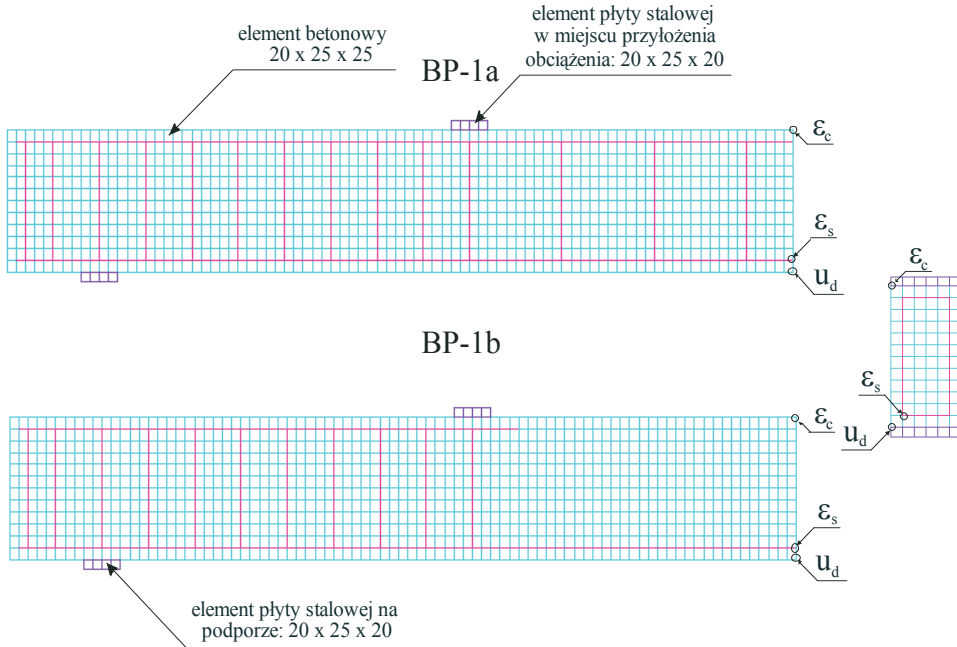
#### STAL ZBROJENIOWA

- moduł sprężystości dla  $\phi$  10 ze stali A-III  $E_s = 194$  GPa, dla  $\phi$  6 ze stali A-II  $E_s = 201$  GPa,
- granica plastyczności dla  $\phi$  10 ze stali A-III  $f_y = 420$  MPa, dla  $\phi$  6 ze stali A-II  $f_y = 353$  MPa,
- wytrzymałość stali na rozciąganie i ściskanie dla  $\phi$  10 ze stali A-III  $f_{st} = 624$  MPa, dla  $\phi$  6 ze stali A-II  $f_{st} = 466$  MPa,
- graniczne odkształcenia w zakresie plastyczności dla  $\phi$  10 ze stali A-III  $\varepsilon_{su} = 116$  ‰, dla  $\phi$  6 ze stali A-II  $\varepsilon_{su} = 75$  ‰,
- moduł odkształcenia plastycznego dla  $\phi$  10 ze stali A-III  $E_T = 1792,1$  MPa, dla  $\phi$  6 ze stali A-II  $E_T = 1542,8$  MPa,
- współczynnik Poissona  $\nu_s = 0,3$ ,
- gęstość stali  $\rho_s = 7800$  kg/m<sup>3</sup>.

#### STAL PŁYT PODPOROWYCH I PŁYT PRZEKAZUJĄCYCH OBCIĄŻENIE

- moduł sprężystości  $E_s = 210$  GPa,
- współczynnik Poissona  $\nu_s = 0,3$ ,
- gęstość stali  $\rho_s = 7800$  kg/m<sup>3</sup>.

Uwzględniając podłużną symetrię elementu, modelowano ½ belki o długości 1700 mm, szerokości 150 mm i wysokości 300 mm. Na Rys. 14 przedstawiono podział belek BP-1a i BP-1b na elementy skończone z zaznaczonymi punktami obserwacji zmian przemieszczenia i odkształcenia.



Rys. 14. Podział belek BP-1 na elementy skończone z oznaczonymi punktami obserwacji zmian przemieszczenia i odkształcenia.

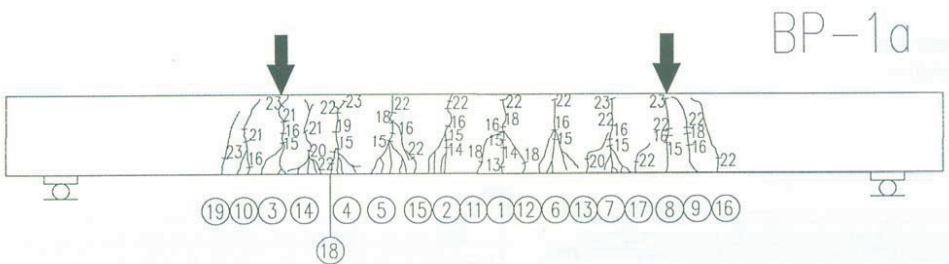
Fig. 14. FEM discretization for BP-1 beams with appointed items of observation of variations deflection and strain.

## 4.1. Wyniki doświadczeń numerycznych

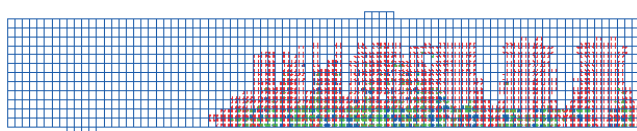
### 4.1.1. Analiza stanu zarysowania

Na Rys. 15 przedstawiono zestawienie obrazu rzeczywistego zarysowania dla całej belki z numerycznym obrazem rys rozmytych dla lewej połowy belki przy tym samym poziomie obciążenia.

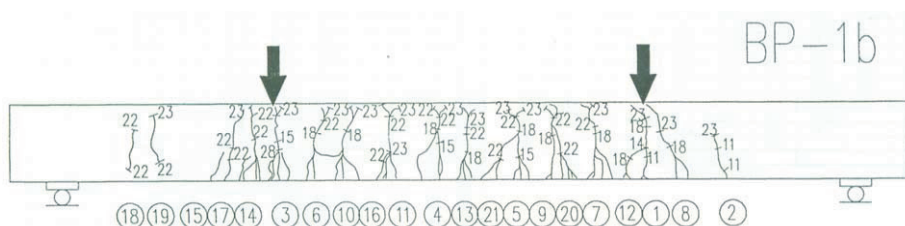
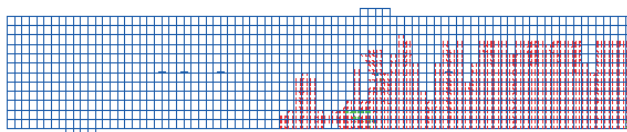
$$F = 23 \text{ kN}$$



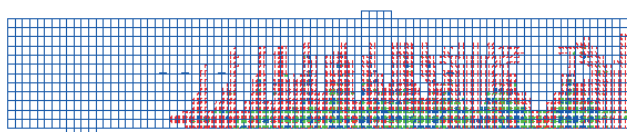
Metoda Newtona-Raphsona ze spadkiem adaptacyjnym [N-R ad]



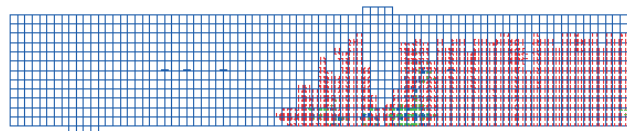
Metoda długości łuku Crisfielda [A-L]



Metoda Newtona-Raphsona ze spadkiem adaptacyjnym [N-R ad]



Metoda długości łuku Crisfielda [A-L]



Rys. 15. Eksperymentalny i numeryczny obraz zarysowania belek BP-1.

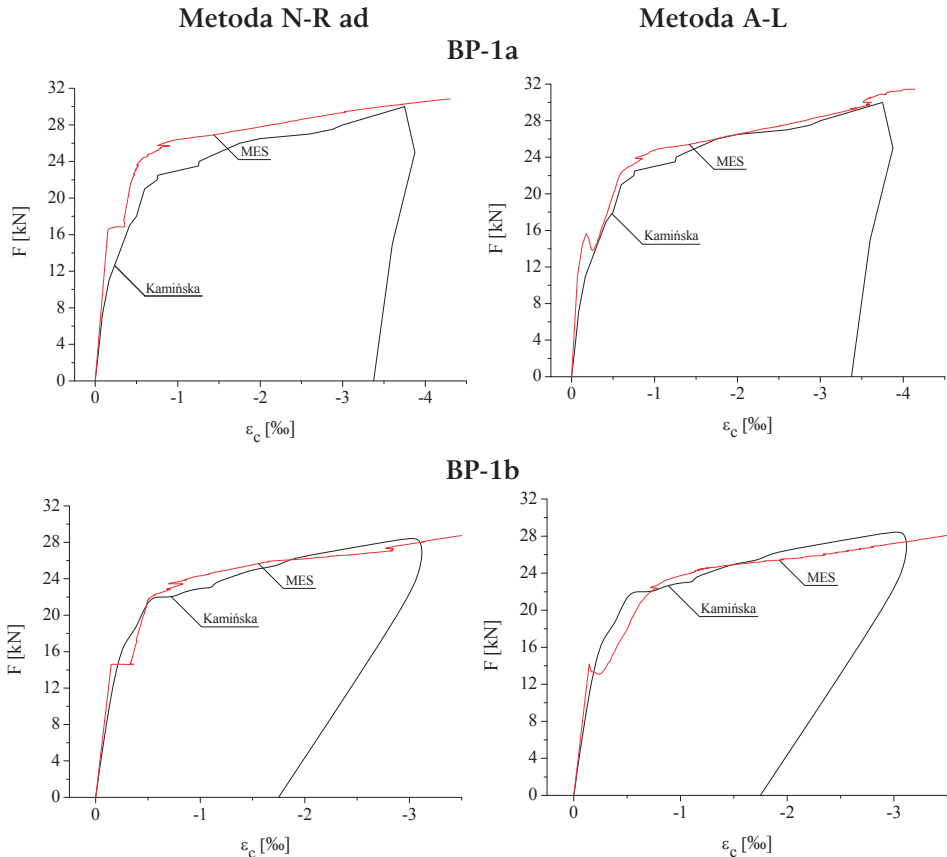
Fig. 15. Experimental and numerical of crack patterns for BP-1 beams.

Otrzymane wyniki numeryczne obszarów zarysowanych są jakościowo zgodne, co do usytuowania, kierunku i koncentracji z wynikami doświadczalnymi, przy czym zaobserwowano nieznacznie większe obszary rys w kierunku podpory w przypadku wyników numerycznych. Zarówno w belkach modelowych, jak i doświadczalnych o niskim stopniu zbrojenia BP-1a na odcinku czystego zginania układ głównych rys dokładnie pokrywa się z układem strzemion. Ponadto uzyskane numerycznie obrazy rys rozmytych potwierdzają tendencję o kształtowaniu się rys zbiorczych w elementach z betonu o wysokiej wytrzymałości, zaobserwowaną również w badaniach doświadczalnych, które praktycznie uniemożliwiają ustalenie średniego rozstawu pomiędzy rysami. W wyniku braku strzemion w modelowych, jak i doświadczalnych belkach BP-1b o niskim stopniu zbrojenia na odcinku czystego zginania układ rys jest przypadkowy.

Numerycznie obrazy rys rozmytych uzyskane przy wykorzystaniu metody długości łuku Crisfielda najlepiej odzwierciedlają rzeczywisty obraz zarysowania. Niedokładności w obszarach rys, związane z ich znacznym zagęszczeniem, można prawdopodobnie wyeliminować poprzez redukcję minimalnego kroku przyrostu obciążenia, co równocześnie spowoduje znaczne wydłużenie czasu trwania obliczeń numerycznych. Niewątpliwie tak uzyskane wyniki będące charakteryzować większą dokładność, gdyż zostaną uwzględnione wszystkie fazy pracy zginanych belek żelbetowych, poprawiona będzie lokalizacja rys pierwotnych z równoczesnym uzyskaniem wąskich obszarów rys rozmytych we wszystkich etapach obciążenia.

#### 4.1.2. Analiza stanu odkształcenia i naprężenia

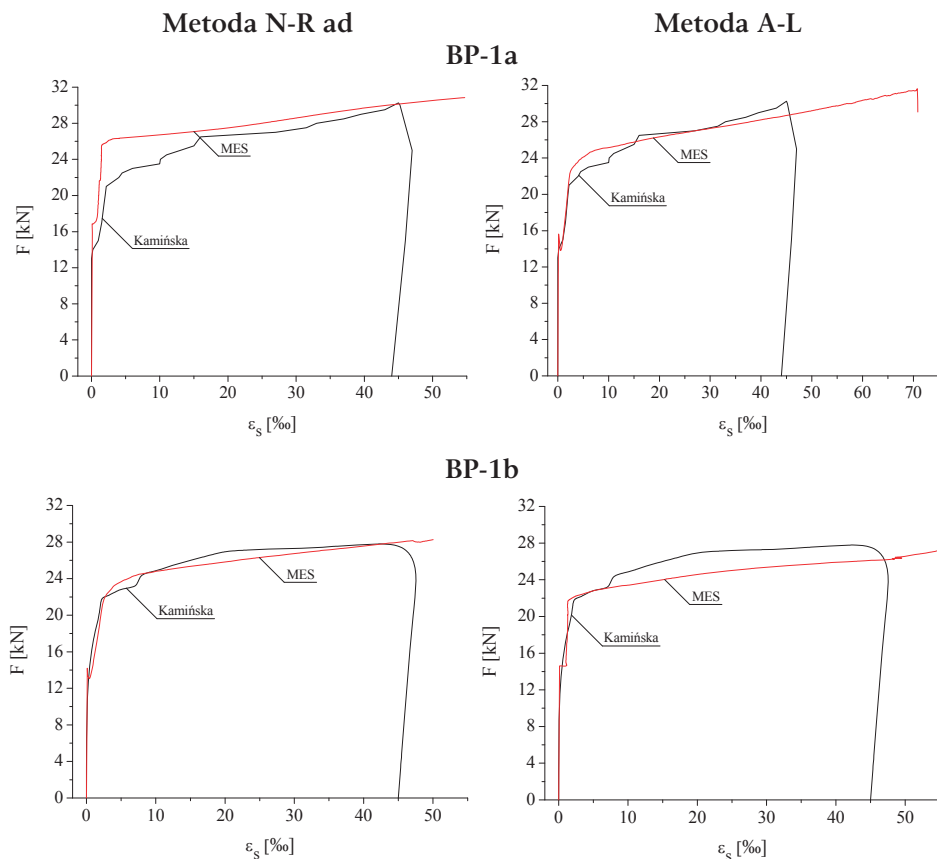
Do obserwacji zmian odkształcenia betonu w zależności od obciążenia przyjęto punkt na górnej krawędzi w przekroju środkowym belek BP, natomiast do rejestracji zmian odkształcenia stali w zależności od obciążenia przyjęto punkt w poziomie pręta podłużnego w strefie rozciąganej w przekroju środkowym belek, Rys. 14. Na Rys. 16 przedstawiony jest rozwój odkształceń skrajnych włókien strefy ściskanej betonu w środku doświadczalnych belek BP i w ich modelach numerycznych.



Rys. 16. Porównanie rozwoju odkształceń skrajnych włókien strefy ściskanej betonu w środku belek BP-1.

Fig. 16. Comparison of development of strain in extreme fibres of the concrete compression zone for BP-1 beams at midspan.

Z kolei na Rys. 17 prezentowane są wykresy zależności odkształcenia pręta podłużnego strefy rozciąganej w funkcji obciążenia  $F$  w środku eksperymentalnych belek BP i w ich modelach numerycznych. W przypadku krzywych doświadczalnych belek BP-1 przedstawiono również gałęzie odciążenia elementu zarejestrowane w chwili wyczerpania możliwości stanowiska badawczego do dalszego odkształcania się elementów o niskim stopniu zbrojenia.



Rys. 17. Porównanie rozwoju odkształceń pręta podłużnego strefy rozciąganej w środku belek BP-1.

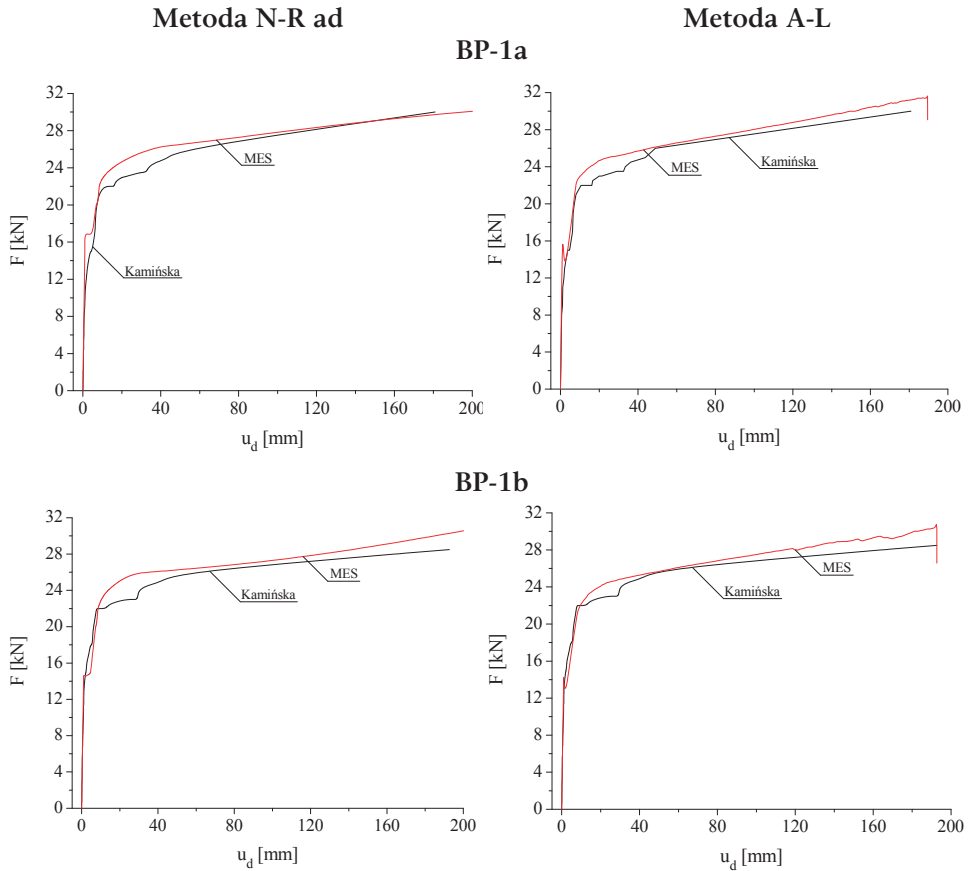
Fig. 17. Comparison of development of strain in longitudinal bar of the tension zone for BP-1 beams at midspan.

Wykresy obciążenie-odkształcenie stali zbrojeniowej w środku belki charakteryzują się zgodnym przebiegiem z krzywymi eksperymentalnymi. W obszarze zachowania liniowo-sprężystego odkształcenia pręta podłużnego określone numerycznie są prawie identyczne z pomierzonymi doświadczalnie. Niezgodności pomiędzy wynikami numerycznymi i doświadczalnymi dla betonu ściskanego i zbrojenia rozciąganego obserwuje się w fazie sprężysto-plastycznej pracy belki po zarysowaniu betonu, a następnie po uplastycznieniu zbrojenia. Na wykresach otrzymanych w wyniku obliczeń numerycznych metodą długości łuku [A-L] widoczny jest charakterystyczny nieznaczny spadek obciążenia w chwili powstania pierwszych rys. Wyraźnie widoczne jest załamanie wykresów związane z uplastycznieniem zbrojenia rozciąganego.

### 4.1.3. Analiza nośności i stanu przemieszczenia

Na Rys. 18 zilustrowano porównania nieliniowych zależności obciążenie-przemieszczenie pionowe w środku belek otrzymane w analizach numerycznych i doświadczeniach.

W obszarze naprężeń sprężystych i po zarysowaniu modelowa belka charakteryzuje się prawie taką samą sztywnością jak belka eksperymentalna, gdyż w betonie o wysokiej wytrzymałości tworzy się mniej mikrorys, co przejawia się bardziej gwałtownym pękaniem.



Rys. 18. Porównanie zależności przemieszczenia pionowego w środku belki od obciążenia.  
Fig. 18. Comparison of relationship load-deflection at midspan for beam.

Drobne różnice dotyczą wartości obciążenia rysującego i fazy powstania uplastycznienia stali zbrojeniowej. Na wykresie obciążenie-przemieszczenie faza uplastycznienia zbrojenia opisana jest standardowo, przez nagłe zmniejszenie sztywności belki. Zastosowane metody przyrostowo-iteracyjne: zarówno technika ustalania spadku adaptacyjnego (N-R ad – adaptive descent), jak i długości łuku Crisfielda (A-L – arc-length) dają zadowalające wyniki numeryczne, jakościowo zgodne z wynikami eksperymentów.

Ostatnio przeprowadzane badania belek żelbetowych przy wykorzystaniu precyzyjnej aparatury pomiarowej [12] dowodzą, że skutki pęknięć belki w strefie

rociąganą nie są kompensowane przez sprężyste właściwości stali i plastyczność betonu w strefie ściskanej. W związku z tym na krzywej zależności obciążenie-ugięcie obserwowane są efekty osłabienia w postaci gwałtownych spadków obciążenia. Takie efekty w obliczeniach numerycznych uzyskano przy zastosowaniu algorytmu obliczeniowego Crisfielda umożliwiającego wygenerowanie kompletnej ścieżki rozwiązania z lokalnymi spadkami sztywności i globalnym osłabieniem konstrukcji. Ponadto algorytm ten charakteryzuje duża efektywność, a zmienny krok przyrostu obciążenia i prawidłowo dobrane parametry długości łuku gwarantują znaczne skrócenie czasu obliczeń i uzyskanie bardzo dokładnego rozwiązania numerycznego.

## **5. Wnioski z doświadczeń numerycznych**

### **5.1. Wnioski dotyczące analizy zachowania belek żelbetowych**

1. Obliczenia numeryczne wykonano dla sprężysto-idealnie plastycznego modelu stali zbrojeniowej oraz sprężysto-kruchego modelu betonu z osłabieniem przy rozciąganiu. Natomiast przy ściskaniu wykorzystano autorską propozycję sprężysto-plastycznego modelu betonu z wytrzymałością resztkową.
2. Zachowanie numerycznych modeli belek żelbetowych opisywane zależnością obciążenie-ugięcie w środku rozpiętości wskazuje na bardzo dobrą zgodność z wynikami doświadczalnymi w całym zakresie obciążenia. Z eksperymentów numerycznych przeprowadzonych dla belek żelbetowych wynika zależność wyężenia konstrukcji od stopnia zbrojenia i sposobu jego rozkładu w materiale matrycy betonowej w całym zakresie pracy konstrukcji.
3. We wszystkich przypadkach różnice pomiędzy obciążeniami granicznymi uzyskanymi w obliczeniach numerycznych a wynikami doświadczalnymi nie przekraczają 5%. Najmniejszy rozrzut wyników jest charakterystyczny dla belek rozwiązywanych metodą długości łuku Crisfielda.
4. W przedstawionych zestawieniach rzeczywistych obrazów zarysowania belek żelbetowych z numerycznymi obrazami rys rozmytych przy tych samych poziomach obciążenia obserwowana jest bardzo dobra zgodność wyników. Schematy zarysowania uzyskane w rozwiązaniu numerycznym jakościowo dobrze odpowiadają opisom mechanizmu zniszczenia w belkach doświadczalnych. Model rysy rozmytej jest odpowiednim modelem numerycznym dla obrazowania mechanizmu zniszczenia zginanych belek żelbetowych w strefach zarysowania i miażdżenia. Ponadto jest szczególnie atrakcyjny dla projektantów w sytuacji, gdy wymagane jest dokładne ustalenie ugięcia elementu konstrukcyjnego dla zadanego obciążenia.
5. Numeryczne modele belek charakteryzują się nieznacznie większą sztywnością od belek doświadczalnych. Większa sztywność numerycznego modelu belki jest najprawdopodobniej wywołana przez kilka czynników, m.in.: (1) homogeniczność modelu konstytutywnego betonu nie uwzględniającego wszystkich efektów fizycznych związanych z procesami mikrozarysowania i rozwoju dyslokacji w płaszczyznach styku ziaren kruszywa i stwardniałego zaczynu cementowego, (2) założenie idealnej przyczepności pomiędzy betonem i stalą zbrojeniową w modelu numerycznym belki w węzłach wspólnych siatki podziału elementów

materiału matrycy betonowej i stali zbrojeniowej, nie uwzględnienie efektu klockującego w prętach stalowych, przyczepności w styku, poślizgu zbrojenia.

## 5.2. Wnioski dotyczące modelowania belek żelbetowych

1. W modelowaniu belek żelbetowych powinny być stosowane uproszczenia zapewniające efektywność uzyskania rozwiązania: (1) wykorzystanie symetrii elementów konstrukcyjnych, (2) lokalizowanie elementów skończonych stali zbrojeniowej zgodnie z siatką podziału elementów skończonych materiału matrycy betonowej.
2. Modelowanie płyt stalowych w miejscach podparcia i przyłożenia obciążeń skupionych odzwierciedla warunki rzeczywiste i jest podstawowym czynnikiem zapewniającym zgodności wyników numerycznych z wynikami doświadczalnymi.
3. Modele numeryczne elementów żelbetowych uwzględniające fizyczne nieliniowości materiałów są podatne na numeryczne niestabilności rozwiązania. W każdym elemencie skończonym może powstać stan zarysowania lub zmiażdżenia w ośmiu punktach numerycznego całkowania na trzech kierunkach prostopadłych. W tych przypadkach w elemencie zmiażdżonym lub zarysowanym w kierunku prostopadłym do płaszczyzny powstania rysy jest wprowadzony parametr sztywności o małej wartości w celu zachowania równowagi numerycznej w elemencie skończonym.
4. Rząd rozwiązania odpowiada analizie dużych odkształceń. W wyniku uwzględnienia nieliniowych efektów geometrycznych w belkach żelbetowych otrzymano lepszą zgodność wyników numerycznych z doświadczalnymi, wyraźnie dostrzegalną w fazie po uplastycznieniu stali zbrojeniowej.
5. W początkowym etapie modelowania należy ustalić sposób podziału na elementy skończone i zbadać zbieżność rozwiązania. W analizach nieliniowego zachowania numerycznych modeli konstrukcji żelbetowych zbyt drobna siatka może powodować numeryczne niestabilności. Z drugiej jednak strony przyjęcie zbyt dużej siatki może skutkować uzyskaniem niedokładnych wyników. W betonie, w chwili powstania rysy lub grupy rys ich długość w wielu przypadkach jest większa od maksymalnego wymiaru kruszywa. W związku z powyższym, wymiary elementu skończonego materiału matrycy betonowej powinny być co najmniej dwa, trzy razy większe od maksymalnego wymiaru ziarna kruszywa w celu uzyskania poprawnego i realnego modelu zarysowania rozmytego.
6. W analizie nieliniowego zachowania belek żelbetowych należy przyjąć parametr wzmacniający zarysowany element betonowy po zarysowaniu. Dla rys zamkniętych wartość przyjętego parametru powinna być nieznacznie mniejsza lub równa 1, a dla rys otwartych powinna być dobrana z przedziału od 0,05 do 0,5.
7. W obliczeniach do rozwiązywania zagadnień niesprężystych wykorzystano różne metody numeryczne. Trudności w otrzymaniu rozwiązania zbieżnego obserwowano przy sterowaniu obciążeniem i założeniu zbyt dużych przyrostów obciążenia. Pozytywnie zweryfikowano przydatność zastosowania metody długości łuku w analizach przestrzennych modeli belek żelbetowych przy uwzględnieniu osłabienia odkształceniowego konstrukcji przy ściskaniu i zeszywnienia przy rozciąganiu. Uzyskano kompletne ścieżki obciążenie-przemieszczenie wykazujące



potwierdzone doświadczalnie lokalne osłabienie konstrukcji żelbetowej. Otrzymany ciągły opis zniszczenia belek żelbetowych jest charakterystyczny przy niskim stopniu zbrojenia.

8. W analizie nieliniowego zachowania belki żelbetowej, całkowite obciążenie przyłożone w modelu powinno być podzielone na określoną liczbę małych przyrostów obciążenia w charakterystycznych fazach pracy belki żelbetowej: powstawaniu rys, uplastycznieniu stali zbrojeniowej, przy osiągnięciu granicznej nośności. Zastosowanie zmiennej wartości przyrostu obciążenia w poszczególnych fazach pracy belki zapewnia poprawę zbieżności rozwiązania i skraca czas wykonania obliczeń numerycznych.

## Literatura

- [1] Aitcin P.C., *High-Performance Concrete*, E & FN SPON, 1998.
- [2] Bathe K.J., *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall Inc., Upper Saddle River, New Jersey, 1996.
- [3] Bonet J., Wood R.D., *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*, Cambridge University Press, 1997.
- [4] Comité Euro-Internacional du Béton, *High Performance Concrete. Recommended to the Model Code 90. Research Need*, Bulletin d'Information, Nr 228, 1995.
- [5] Crisfield M.A., *An arc-length method including line searches and accelerations*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 19, s. 1269-1289, 1983.
- [6] Crisfield M.A., *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, John Wiley & Sons, Inc., 2000.
- [7] Eggert, G.M., Dawson, P.R., Mathur K.K., *An Adaptive Descent Method for Nonlinear Viscoplasticity*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 31, s. 1031-1054, 1991.
- [8] Kamińska M.E., *Doświadczalne badania żelbetowych elementów prętowych z betonu wysokiej wytrzymałości*, KILiW, PAN, Łódź, 1999.
- [9] Kleiber M., *Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum*, Wyd. PAN, Warszawa-Poznań, 1985.
- [10] Lyndon F.D., Balendran R.V., *Some observations on elastic properties of plain concrete*, Cement and Concrete Research, 16, Nr 3, s. 314-324, 1986.
- [11] Pecce M., Fabbrocino G., *Plastic Rotation Capacity of Beams in Normal and High-Performance Concrete*, ACI Structural Journal, s. 290-296, March-April 1999.
- [12] Rashid M.A., Mansur M.A., *Reinforced High-Strength Concrete Beams in Flexure*, ACI Structural Journal, Vol. 102, Nr 3, s. 462-471, May-June 2005.
- [13] Smarzewski P., *Modelowanie mechanizmu zniszczenia belek żelbetowych z betonu wysokiej wytrzymałości*, Praca doktorska. Politechnika Lubelska, 2008.
- [14] Smarzewski P., Stolarski A., *Modelowanie zachowania niesprężystej belki żelbetowej*, Biuletyn WAT, Vol. LVI, Nr 2, str. 147-166, 2007.
- [15] Taerwe L.R., *Brittleness versus Ductility of High Strength Concrete*, Structural Engineering Journal, 4, s. 40-45, 1991.
- [16] Willam K.J., Warnke E.P., *Constitutive Model for the Triaxial Behavior of Concrete*, Proceedings, International Association for Bridge and Structural Engineering, Vol. 19, ISMES, Bergamo, Italy, 1975.
- [17] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., *The Finite Element Method, Fifth Edition*, Butterworth Heinemann, 2000.

# **Numerical analysis of inelastic reinforced high-strength concrete beams with low reinforcement ratio**

**Piotr Smarzewski**

*Lublin University of Technology, Faculty of Civil and Sanitary Engineering,  
Department of Civil Engineering,  
Nadbystrzycka 40, 20-618 Lublin, e-mail: p.smarzewski@pollub.pl*

**Abstract:** Numerical modelling of flexural behavior of the reinforced high-strength concrete beams with low reinforcement ratio is discussed in this paper. Modelling mechanism of failure reinforced concrete beams under static load, static deformation processes of the reinforced high-strength concrete beams with regard to the physical nonlinearities of the structural materials (i.e. concrete and reinforcement steel) were developed using finite element analysis. The comparison of the numerical and experimental results as well as theoretical solutions, were presented. The compared results indicate correctness of the constitutive models of the structural materials: concrete and reinforcing steel and effectiveness of the solution method.

**Key words:** finite element method, reinforced concrete members, beams.