

Stosunki sił i momentów sił jako kryteria podobieństwa dynamicznego różnych zjawisk występujących w inżynierii wiatrowej, inżynierii śniegowej i dynamice płynów

Część I – Podstawy i zagadnienia ustalone

Andrzej Flaga

Wydział Inżynierii Lądowej, Instytut Mechaniki Budowli, Politechnika Krakowska
e-mail: liwpk@windlab.pl

Streszczenie: Praca dotyczy kryteriów podobieństwa dynamicznego różnych zjawisk występujących w inżynierii wiatrowej, inżynierii śniegowej i dynamice płynów wyprowadzonych ze stosunków sił i momentów sił wpływających na te zjawiska. Wyprowadzone i analizowane w części I kryteria podobieństwa dynamicznego dotyczą głównie następujących zagadnień ustalonych: 1. Przepływów i opływów płynów; 2. Zagadnień kontaktowych płyn – ciało stałe; 3. Zagadnień pływania ciała stałego po płynie bez i z obecnością fal powierzchniowych.

Słowa kluczowe: kryteria podobieństwa dynamicznego, inżynieria wiatrowa, inżynieria śniegowa, dynamika płynów, zagadnienia ustalone.

1. Siły występujące w zagadnieniach mechaniki płynów i ciał stałych lub cząstek materialnych

Jeżeli dwa zjawiska są dynamicznie podobne, korespondujące z nimi siły muszą być w tych samych stosunkach w obydwu podobnych przypadkach. Wektor siły F o module F może być odniesiony do różnych właściwości fizycznych płynu, ciała stałego czy cząstki materialnej.

Przez cząstki materialne rozumie się tu między innymi: rozdrobnione cząstki ciała stałego, pyły, mikrocząsteczki ciała stałego stanowiące zawiesinę, pęcherzyki powietrza w wodzie, krople wody w powietrzu, płatki śniegu w powietrzu, drobne kryształki lodu w powietrzu lub chmurze śniegowej itp.

W praktycznych zastosowaniach zagadnień interakcji płyn – ciało stałe, następujące siły, które mogą działać na element płynu (f), ciała stałego (s) (lub cząstki (p)), mogą być wyróżnione, używając odpowiednich indeksów lub wskaźników dolnych [1,2,3]:

- Siły ciężkości (g) – F_{gf}, F_{gs} ;
- Siły ciśnienia (Δp) – $F_{\Delta pf}$;
- Siły ciśnienia powierzchniowego (Δp) – $\mathcal{F}_{\Delta p}; \mathcal{F}_{\Delta pf}, \mathcal{F}_{\Delta ps}; \mathcal{F}_{\Delta pf} = -\mathcal{F}_{\Delta ps}$;
- Siły lepkości (v) – F_{vf} ;
- Siły lepkości powierzchniowej (v) – $\mathcal{F}_v; \mathcal{F}_{vf}, \mathcal{F}_{vs}; \mathcal{F}_{vf} = -\mathcal{F}_{vs}$;
- Siły chropowatości powierzchni / tarcia powierzchniowego (r)
– $\mathcal{F}_r; \mathcal{F}_{rf}, \mathcal{F}_{rs}; \mathcal{F}_{rf} = -\mathcal{F}_{rs}$;
- Siły sprężystości (e) – $F_{ef} = F_{Kf}, F_{es}; F_{Es}, F_{Gs}$;

- Siły bezwładności (i) – F_{if}, F_{is}, F_{ifs} ;
- Siły napięcia powierzchniowego (t) – F_{tf} ;
- Siły tłumienia (d) – F_{ds} ;
- Siły wyporu (b) – $\mathcal{F}_b, \mathcal{F}_{bf}, \mathcal{F}_{bs}; \mathcal{F}_{bf} = -\mathcal{F}_{bs}$;
- Siły oporu falowego (w) – $\mathcal{F}_w, \mathcal{F}_{wf}, \mathcal{F}_w; \mathcal{F}_{wf} = -\mathcal{F}_{ws}$;
- Siły unoszenia lub opadania ciała stałego (lub cząstek materialnych) zanurzonego w płynie – $F_{gb} = F_{gs} - \mathcal{F}_{bs}$.

Wymienione siły mogą być siłami powierzchniowymi – a więc powiązаныmi z odpowiednimi naprężeniami – lub siłami objętościowymi – tj. powiązаныmi z gęstościami odpowiednich sił. Zarówno jedne jak i drugie mogą dotyczyć małych elementów powierzchniowych lub objętościowych płynu i ciała stałego (cząstki), o wymiarach charakterystycznych odpowiednio d_f i d_s (d_p), lub dużych elementów powierzchniowych lub objętościowych płynu i ciała stałego (cząstki) – np. całego ciała stałego, o wymiarach charakterystycznych odpowiednio D_f i D_s (D_p).

Rozpatrzmy dalej wybrane zagadnienia stosowanej mechaniki płynów i ciał stałych lub cząstek materialnych, ze szczególnym zwróceniem uwagi na zagadnienia kontaktowe płyn – ciało stałe lub płyn – cząstki materialne, przy ich ruchu względnym. W rozważaniach tych założymy, że spełnione są kryteria podobieństwa geometrycznego danego zagadnienia, gdy chodzi o skalę naturalną (prototyp identyfikowany indeksem dolnym P) i skalę modelową (model identyfikowany indeksem dolnym M , zwykle wykonany w mniejszej skali).

Interesować nas będą siły lokalne, związane z niedużymi elementami materialnymi powierzchniowymi lub objętościowymi, oraz siły globalne (wypadkowe), związane z dużymi elementami materialnymi powierzchniowymi lub objętościowymi. W tym ostatnim przypadku będziemy mówili o globalnych (wypadkowych) siłach i momentach sił. Ponieważ każda z sił lub momentów sił jest w ogólności wielkością wektorową – a więc określoną np. przez trzy składowe w kartezjańskim układzie współrzędnych (x, y, z) – dlatego też w zagadnieniach przestrzennych należy brać pod uwagę wszystkie lub wybrane składowe tych sił i momentów sił. Niektóre z zagadnień dotyczyć będą jednej z tych składowych (np. siły oporu aerodynamicznego lub hydrodynamicznego).

Większość z rozpatrywanych zagadnień, to zagadnienia ustalone, a więc takie gdy prędkość napływającego płynu V_f , prędkość charakterystyczna ciała stałego V_s (cząstki V_p) czy też ich prędkość względna, są stałe w czasie.

W rozważaniach przyjmiemy ponadto, że spełnione są kryteria podobieństwa kinematycznego przepływu płynu na powierzchniach brzegowych zewnętrznych wyodrębnionej objętości płynu, zawierającej ciało stałe lub cząstki materialne.

Wyprowadzone i analizowane dalej kryteria podobieństwa dynamicznego dotyczyć będą głównie następujących zagadnień:

- Przepływów i opływów płynu;
- Zagadnień kontaktowych płyn – ciało stałe;
- Zagadnień pływania ciała stałego po płynie bez i z obecnością fali powierzchniowej;
- Unoszenia się i opadania ciała stałego lub cząstek materialnych w nieruchomym lub ruchomym płynie;
- Drgań ciała stałego w nieruchomym i ruchomym płynie.

Wymienione powyżej siły występujące w płynie, ciele stałym (cząstce) oraz na powierzchni kontaktowej płyn – ciało stałe (płyn – cząstki), będziemy charakteryzować przez współczynniki lub parametry (z reguły wymiarowe) występujące w zależnościach definiują-

cych te siły. Rozpatrując zagadnienie na gruncie mechaniki ośrodków ciągłych założymy, że zbiór następujących wielkości wymiarowych charakteryzuje omawiane siły:

$$\left(g; \rho_f, \rho_s, \rho_p; V_f, V_s, V_p, V_{ts}, V_{tp}, V_{wf}; d_f, d_s, d_p, D_f, D_s, D_p; \Omega_f, \Omega_s, \Omega_p; K_f; E_s, G_s; \mu_f, \mu_s, \mu_r; \Delta p_f = p_f - p_{stf}; \Delta p = p_{fs} - p_{stf}; \sigma_{tf}, A_{wf}, \lambda_{wf} \right) \quad (1)$$

gdzie: g – przyspieszenie ziemskie; ρ_f, ρ_s, ρ_p – gęstości masy płynu, ciała stałego i cząstek; V_f, V_s, V_p – charakterystyczne prędkości płynu (zwykle daleko przed ciałem stałym), ciała stałego i cząstek; V_{ts}, V_{tp} – tzw. prędkości terminalne swobodnego spadku (lub unoszenia się) ciała stałego i cząstek w płynie; V_{wf} – prędkość fali powierzchniowej płynu; $d_f, d_s, d_p, D_f, D_s, D_p$ – wymiary charakterystyczne małego lub dużego elementu powierzchniowego lub objętościowego płynu, ciała stałego i cząstek; $\Omega_f, \Omega_s, \Omega_p$ – objętości dużego elementu objętościowego płynu, całego ciała stałego i całej cząstki; K_f – moduł ściśliwości (sprężystości objętościowej) płynu; E_s, G_s – moduły sprężystości podłużnej (Younga) i poprzecznej (Kirchhoffa) ciała stałego; μ_f – współczynnik lepkości dynamicznej płynu; μ_s – współczynnik tłumienia drgań (tarcia wewnętrznego) ciała stałego; μ_r – współczynnik tarcia powierzchniowego ciała stałego i płynu (bezwymiarowy); p_{fs} – ciśnienie na elemencie płynu lub na powierzchni brzegowej ciała stałego i płynu; p_{stf} – ciśnienie statyczne w płynie daleko przed ciałem stałym; σ_{tf} – współczynnik napięcia powierzchniowego płynu jeśli element płynu jest na powierzchni kontaktowej płyn – gaz; A_{wf}, λ_{wf} – odpowiednio amplituda i długość fali powierzchniowej płynu.

W przypadku gdy ciało stałe (cząstki) traktowane jest całościowo (tj. globalnie), odpowiednio parametry charakteryzujące siły lub momenty globalne (wypadkowe, wynikowe) sił będą doprecyzowane w trakcie dalszych rozważań.

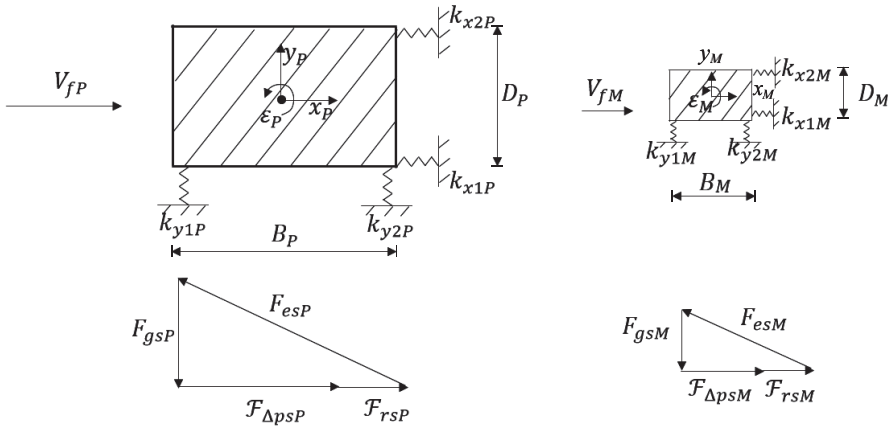
W wielu problemach kontaktowych płyn – ciało stałe niektóre z rozważanych sił albo nie występują lub są mało znaczące. Na Rys. 1 są przedstawione dwa geometrycznie podobne układy płyn – ciało stałe, tj. sprężyste podparte ciało pryzmatyczne o osi poziomej y prostopadłej do napływającego płynu o prędkości V_f . Ponadto przyjmijmy, że te dwa układy są kinematycznie podobne i że siły globalnej interakcji płyn – ciało stałe działające na ciało stałe są: $F_{gs}, \mathcal{F}_{\Delta ps}, \mathcal{F}_{rs}$ i F_{es} . Wówczas podobieństwo dynamiczne analizowanego zagadnienia będzie osiągnięte, gdy:

$$\frac{F_{gsP}}{F_{gsM}} = \frac{\mathcal{F}_{\Delta psP}}{\mathcal{F}_{\Delta psM}} = \frac{\mathcal{F}_{rsP}}{\mathcal{F}_{rsM}} = \frac{F_{esP}}{F_{esM}} \quad (2)$$

gdzie: indeksy dolne P i M odnoszą się jak poprzednio do prototypu i modelu. Zależności te mogą być wyrażone jako:

$$\left(\frac{F_{es}}{F_{gs}} \right)_M = \left(\frac{F_{es}}{F_{gs}} \right)_P; \quad \left(\frac{F_{es}}{\mathcal{F}_{\Delta ps}} \right)_M = \left(\frac{F_{es}}{\mathcal{F}_{\Delta ps}} \right)_P; \quad \left(\frac{F_{es}}{\mathcal{F}_{rs}} \right)_M = \left(\frac{F_{es}}{\mathcal{F}_{rs}} \right)_P \quad (3)$$

Każda z tych wielkości jest bezwymiarowa, a więc jest liczbą podobieństwa. Dla czterech sił działających na ciało stałe otrzymaliśmy trzy niezależne wyrażenia, które muszą być spełnione. Gdyby były trzy siły otrzymalibyśmy dwa niezależne wyrażenia itd. Znaczenie tych bezwymiarowych stosunków będzie dyskutowane w następnych paragrafach.



Rys. 1. Prototyp (a) i model (b) o skali długości $K_L = \frac{D_P}{D_M} = \frac{B_P}{B_M}$ i skali prędkości $K_{V_f} = \frac{V_{fP}}{V_{fM}}$ oraz korespondujące siły

2. Analiza wymiarowa poszczególnych sił

Przyjmijmy trójelementową bazę wymiarową: (ρ, V, D) dla wszystkich wielkości wymiarowych zbioru (1), charakterystycznych dla poszczególnych sił, przy czym w zależności od rozpatrywanego przypadku będzie:

$$\rho = \begin{cases} \rho_f \\ \rho_s; \\ \rho_p \end{cases}; \quad V = \begin{cases} V_f \\ V_s, V_p \\ V_{ts}, V_{tp} \\ V_{wf} \end{cases}; \quad D = \begin{cases} d_f, D_f \\ d_s, D_s \\ d_p, D_p \end{cases} \quad (4)$$

W celu skrócenia zapisu w dalszym ciągu rozważań wprowadzimy zamiast indeksów s (ciało) i p (cząstka) jeden indeks o (obiekt). Podobnie dla składowych x, y i z globalnych sił i momentów sił wprowadzimy także jeden indeks j , czyli: $o = s, p; j = x, y, z$.

Wówczas wymiary poszczególnych sił lokalnych lub globalnych można wyrazić w postaci następujących zależności wymiarowych:

– Lokalne siły ciężkości

$$[F_g] = \begin{cases} [F_{gf}] = [g]^1 [\rho_f]^1 [d_f]^3 \\ [F_{go}] = [g]^1 [\rho_o]^1 [d_o]^3 \end{cases} \quad (5)$$

– Globalne siły ciężkości

$$[F_{gz}] = \begin{cases} [F_{gfz}] = [g]^1 [\rho_f]^1 [\Omega_f] = [\rho]^1 [\rho_f]^1 [D_f]^3 \\ [F_{goz}] = [g]^1 [\rho_o]^1 [\Omega_o] = [\rho]^1 [\rho_o]^1 [D_o]^3 \end{cases} \quad (6)$$

– Lokalne siły ciśnienia

$$[F_{\Delta pf}] = [\Delta_{pf}]^1 [d_f]^2 \quad (7)$$

- Lokalne siły ciśnienia powierzchniowego

$$[\mathcal{F}_{\Delta po}] = [\Delta_{po}]^1 [d_o]^2 \quad (8)$$

- Globalne siły i momenty sił ciśnienia powierzchniowego
 - siły aerodynamiczne lub hydrodynamiczne

$$[F_{\Delta poj}] = [\Delta_{po}^* \cdot C_{oj}^*]^1 [D_o]^2 \quad (9)$$

- moment aerodynamiczny lub hydrodynamiczny

$$[M_{\Delta poj}] = [\Delta_{po}^* \cdot C_{m oj}^*]^1 [D_o]^3 \quad (10)$$

gdzie: Δ_{po}^* – charakterystyczna wielkość związana z Δ_{po} (np. maksymalne ciśnienie dodatnie (parcie)); C_{oj}^* – bezwymiarowe współczynniki sił; $C_{m oj}^*$ – bezwymiarowe współczynniki momentów sił.

- Siły lepkości lokalnej i globalnej

$$[F_{vf}] = \begin{cases} [\mu_f]^1 [V_f]^1 [d_f]^1 \\ [\mu_f]^1 [V_f]^1 [D_f]^1 \end{cases} \quad (11)$$

- Lokalne siły lepkości powierzchniowej

$$[\mathcal{F}_{vo}] = \begin{cases} [\mu_f]^1 [V_f]^1 [d_o]^1 \\ [\mu_f]^1 [V_o]^1 [d_o]^1 \end{cases} \quad (12)$$

- Lokalne siły chropowatości (szorstkości) powierzchni / tarcia powierzchniowego

$$[\mathcal{F}_{ro}] = [\mu_{ro} \cdot \Delta_{po}]^1 [d_o]^2 \quad (13)$$

- Globalne siły i momenty sił chropowatości (szorstkości) powierzchni / tarcia powierzchniowego

$$[F_{roj}] = [\mu_{ro}^* \cdot \Delta_{po}^* \cdot C_{roj}^*]^1 [D_o]^2 \quad (14)$$

$$[M_{roj}] = [\mu_{ro}^* \cdot \Delta_{po}^* \cdot C_{mroj}^*]^1 [D_o]^3 \quad (15)$$

gdzie: μ_{ro}^* – bezwymiarowy charakterystyczny (np. średni) współczynnik szorstkości / tarcia; Δ_{po}^* – wielkość charakterystyczna związana z Δ_{po} ; C_{roj}^* , C_{mroj}^* – bezwymiarowe współczynniki szorstkości / tarcia sił i momentów sił.

- Lokalne siły sprężyste / elastyczne
 - w płynie

$$[F_{Kf}] = [K_f]^1 [d_f]^2 \quad (16)$$

– w ciele stałym

$$[F_{Es}] = [E_s]^1 [d_s]^2; \quad [F_{Gs}] = [G_s]^1 [d_s]^2 \quad (17)$$

– Globalna siła i moment siły sprężystej

W przypadku gdy rozpatrujemy np. drgania poprzeczno-skrętne (translacyjno-rotacyjne) ciała stałego o dwóch stopniach swobody: poprzecznym (translacyjnym) ζ i skrętnym (rotacyjnym) ε , podpartego sprężysto, zanurzonego w strumieniu płynu, zamiast wielkości E_s i G_s można przyjąć również następujące wielkości charakteryzujące globalną sprężystą siłę i globalny sprężysty moment ciała stałego: 1. Współczynniki sztywności poprzecznej k_z i skrętnej k_ε ; 2. Częstotliwości drgań własnych poprzecznych f_z i skrętnych f_ε . Wówczas będzie:

– dla globalnej siły poprzecznej sprężystej

$$[F_{kz}] = [k_z]^1 [D_s]^1; \quad [F_{fz}] = \begin{cases} [f_z]^2 [\rho_s] [D_s]^4 \\ [f_z]^2 [\rho_s] [\Omega_s] [D_s] \end{cases} \quad (18)$$

– dla globalnego momentu skracającego sprężystego

$$[M_{k\varepsilon}] = [k_\varepsilon]^1; \quad [M_{f\varepsilon}] = \begin{cases} [f_\varepsilon]^2 [\rho_s] [D_s]^4 \\ [f_\varepsilon]^2 [\rho_s] [\Omega_s] [D_s] \end{cases} \quad (19)$$

– Sprężysty moment zginający i sprężysty moment skracający przekroju poprzecznego belki

Gdyby zaś rozpatrywać drgania poprzeczno-skrętne belki, dla której właściwości sprężyste giętno-skrętne są scharakteryzowane przez sztywność giętną EJ i sztywność skrętną GJ_t , gdzie: J , J_t – momenty bezwładności przekroju poprzecznego belki przy zginaniu i skręcaniu, wówczas otrzymamy:

$$[M_{EJ}] = [E][J][D_s]^{-2}; \quad [M_{GJ_t}] = [G][J_t][D_s]^{-2} \quad (20)$$

– Siły bezwładności lokalnej i globalnej

– w płynie

$$[F_{if}] = \begin{cases} ([\rho_f]^1 [V_f]^2 [d_f]^2 \\ ([\rho_f]^1 [V_f]^2 [D_f]^2 \end{cases} \quad (21)$$

– w ciele stałym lub cząstce

$$[F_{io}] = \begin{cases} ([\rho_o]^1 [V_o]^2 [d_o]^2 \\ ([\rho_o]^1 [V_o]^2 [D_o]^2 \end{cases} \quad (22)$$

– pochodzące od tzw. masy związanej płynu poruszającej się wspólnie (współdrążącej) z ciałem stałym lub cząstką

Gdy ciało stałe (lub cząstka) zanurzone w płynie doznaje przyspieszenia – np. w ruchu drgającym – część masy płynu związanej z ciałem stałym wykonuje ruchy zbliżone do ruchów ciała stałego. Ta dodatkowa masa płynu związana z ciałem stałym nazywa się masą

związaną (ang. *added mass lub virtual mass lub hydrodynamic mass*). Powstają wtedy dodatkowe siły bezwładności płynu F_{if_o} – zwane siłami masowymi związanymi – oddziaływujące na ciało stałe. Wówczas będzie:

$$[F_{if_o}] = \begin{cases} [\rho_f]^1 [V_o] [d_o]^2 \\ [\rho_f]^1 [V_o] [D_o]^2 \end{cases} \quad (23)$$

- Globalne bezwładnościowe siły i momenty sił drgającego ciała stałego i związane masy otaczającego płynu

Gdyby znowu jak poprzednio wziąć pod uwagę drgania translacyjno-rotacyjne ciała stałego o dwóch stopniach swobody: translacyjnym ζ i rotacyjnym ε , zanurzonego w płynie, wówczas zamiast wielkości ρ_s i ρ_f można by przyjąć również następujące wielkości charakteryzujące siły bezwładności translacyjnej i momenty bezwładności rotacyjnej oraz siłę i moment bezwładności pochodzące od masy związanej:

- siła bezwładności poprzecznej (translacyjnej) ciała F_{isz}

$$[F_{isz}] = \begin{cases} [m]^1 [V_s]^2 [D_s]^{-1} \\ [\rho_s]^1 [\Omega_s]^1 [V_s]^2 [D_s]^{-1} \end{cases} \quad (24)$$

- moment bezwładności obrotowej (rotacyjnej) ciała $M_{is\varepsilon}$

$$[M_{is\varepsilon}] = \begin{cases} [J]^1 [V_s]^2 [D_s]^{-2} \\ [\rho_s]^1 [\Omega_s]^1 [V_s]^2 \end{cases} \quad (25)$$

- siła masy związanej wynikająca z ruchu translacyjnego ciała F_{ifsz}

$$[F_{ifsz}] = \begin{cases} [m_f]^1 [V_s]^2 [D_s]^{-1} \\ [\rho_f]^1 [\Omega_s]^1 [V_s]^2 [D_s]^{-1} \end{cases} \quad (26)$$

- moment siły masy związanej wynikający z ruchu rotacyjnego ciała M_{ifse}

$$[M_{ifse}] = \begin{cases} [J_f]^1 [V_s]^2 [D_s]^{-2} \\ [\rho_f]^1 [\Omega_s]^1 [V_s]^2 \end{cases} \quad (27)$$

- wynikowa siła bezwładności działająca na ciało $F_{iz\Sigma} = F_{isz} + F_{ifsz}$

$$[F_{iz\Sigma}] = [\rho_s + \rho_f]^1 [\Omega_s]^1 [V_s]^2 [D_s]^{-1} \quad (28)$$

- wynikowy moment siły bezwładności działający na ciało $M_{i\varepsilon\Sigma} = M_{is\varepsilon} + M_{ifse}$

$$[M_{i\varepsilon\Sigma}] = [\rho_s + \rho_f]^1 [\Omega_s]^1 [V_s]^2 \quad (29)$$

W powyższych zależnościach przyjęto następujące dodatkowe oznaczenia: m – masa ciała; J – moment bezwładności obrotowej ciała; m_f – masa związana płynu; J_f – moment bezwładności obrotowej masy związanej płynu; Ω_s – objętość ciała.

- Lokalna siła napięcia powierzchniowego

$$[F_{tf}] = [\sigma_{tf}][d_f] \quad (30)$$

- Lokalna siła tłumienia

$$F_{ds}] = [\mu_s]^1[V_s]^1[d_s]^2 \quad (31)$$

- Globalna siła i moment siły tłumienia

Rozpatrzmy znowu – podobnie jak wyżej – drgania translacyjno-rotacyjne ciała stałego zanurzonego w płynie. Zakładając dalej, że siła i moment siły tłumienia drgań opisane są modelami liniowymi typu wiskotycznego (tj. proporcjonalnymi odpowiednio do prędkości drgań translacyjnych \dot{z} i rotacyjnych $\dot{\varepsilon}$), można wprowadzić następujące współczynniki tłumienia drgań translacyjnych μ_{sz} i rotacyjnych $\mu_{s\varepsilon}$: μ_{szs} , μ_{szf} – współczynniki siły tłumienia translacyjnego pochodzące odpowiednio od ciała i płynu (tzw. siły tłumienia hydrodynamicznego lub aerodynamicznego); μ_{ses} , μ_{sef} – podobnie jak wyżej tylko w odniesieniu do momentu siły tłumienia rotacyjnego; $\mu_{sz\Sigma} = \mu_{szs} + \mu_{szf}$ – wynikowy współczynnik tłumienia translacyjnego; $\mu_{s\varepsilon\Sigma} = \mu_{ses} + \mu_{sef}$ – wynikowy współczynnik tłumienia rotacyjnego. Wówczas będzie:

- dla globalnej siły tłumiącej drgania translacyjne

$$[F_{dz\Sigma}] = [(\mu_{szs} + \mu_{szf})]^1[V_s]^1 \quad (32)$$

- dla globalnego momentu siły tłumiącej drgania rotacyjne

$$[M_{d\varepsilon\Sigma}] = [(\mu_{ses} + \mu_{sef})]^1[V_s][D]^{-1} \quad (33)$$

- Globalne siły wyporu dla ciała i cząstki

$$[F_b] = [\rho_f]^1[g]^1[D_o]^3 \quad (34)$$

- Globalna siła oporu falowego dla ciała stałego

$$[F_w] = [A_w]^1[\lambda_w]^{-1}[\rho_f]^1[V_w]^2[D_s]^2 \quad (35)$$

- Globalne siły unoszenia lub opadania ciała stałego lub cząstek materialnych zanurzonych w płynie

$$[F_{gb}] = \begin{cases} [(\rho_s - \rho_f)]^1[g]^1[D_o]^3 \\ [(\rho_s - \rho_f)]^1[V_t]^2[D_o]^2 \end{cases} \quad (36)$$

3. Wybrane przypadki szczególne stosunków sił i stosunków momentów sił jako liczby podobieństwa

3.1. Stosunek globalnej siły bezwładności do globalnej siły lepkości dla przepływów i opływów płynów – liczba Reynoldsa Re

W zastosowaniach praktycznych przepływów i opływów płynów wokół ciał stałych w obszarze przestrzennym o wymiarze charakterystycznym D_f , występuje kilka takich sytuacji kiedy globalne siły bezwładności i lepkości są najważniejsze. Wówczas pola prędkości i ciśnienia w tym obszarze są wprost zależne od stosunku globalnej siły bezwładności do globalnej siły lepkości.

Rozważmy kilka przykładów takich przypadków. Gdy płyn przepływa przez całkowicie wypełniony przewód, siły ciężkości nie zmieniają formy przepływu. Zjawiska kapilarne są wtedy także praktycznie nieistotne. Wtedy najważniejszymi są siły bezwładności i tarcia w płynie spowodowane lepkością. Podobna sytuacja ma miejsce, gdy samolot porusza się w powietrzu z prędkością taką, że ściśliwość powietrza jest mało istotna. Także w przypadku okrętu podwodnego odpowiednio głęboko zanurzonego w morzu tak, że nie wytwarza on fal na powierzchni morza, jedynymi istotnymi siłami są siły tarcia i bezwładności.

Rozważając stosunek sił bezwładności i lepkości otrzymamy parametr bezwymiarowy zwany liczbą Reynoldsa Re , na cześć Osborne Reynoldsa, który przedstawił to w publikacji jego pracy eksperymentalnej w 1882 r.

Tę samą liczbę kryterialną otrzymał Lord Rayleigh 10 lat później, który rozwinął teorię podobieństwa dynamicznego. Stosunek tych dwóch sił daje:

$$F_{vf}^{if} = \frac{F_{if}}{F_{vf}} \triangleq Re = \frac{\rho_f V_f^2 D_f^2}{\mu_f V_f D_f} = \frac{\rho_f V_f D_f}{\mu_f} = \frac{V_f D_f}{\nu_f} \quad (37)$$

gdzie: $\nu_f = \mu_f / \rho_f$ – lepkość kinematyczna płynu; \triangleq – znak, który oznacza że odpowiednie zależności są sobie równe lub równoważne w odniesieniu do wymiarów.

W każdym konsystentnym układzie jednostek miar, Re jest liczbą bezwymiarową. Wymiar liniowy D_f może być dowolną długością związaną z formą przepływu. I tak np. dla rury całkowicie wypełnionej płynem, może to być np. jej średnica lub promień, co wpływa na odpowiednią zmianę wartości liczby Re .

Jeżeli dwa układy, w rozważanym przypadku prototyp i jego model (np. dwa przewody rurowe o różnych średnicach), mają być równoważne dynamicznie, gdy najważniejszymi siłami są siły bezwładności i siły tarcia wiskotycznego, muszą one obydwie mieć takie same wartości liczby Re . Gdy w obu przypadkach będzie to ten sam płyn, z warunku tego wynika, że należy zrealizować dużą prędkość przepływu płynu w modelu o małych wymiarach liniowych. Istnieje także możliwość porównania przepływów dwóch płynów o różnych lepkościach pod warunkiem, że D_f i V_f są dobrane w taki sposób aby dawać te same wartości liczby Re .

Ponieważ ciśnienia powierzchniowe działające na ciało zanurzone w płynie zależą od liczby Re , stąd też wynikające z nich aerodynamiczne lub hydrodynamiczne siły i momenty sił są także zależne od Re .

W przypadku opływów płynów wokół ciał stałych o wymiarze charakterystycznym D_s , zwykle przyjmuje się, że: $D_f = D_s = D$.

Gdy liczby Reynoldsa dla modelu i jego prototypu są takie same, wówczas otrzymuje się następujące wyrażenia dla skal: prędkości k_V , czasu k_t , przyspieszenia k_a , siły k_F i ciśnienia k_p :

$$Re = \frac{D_M V_M}{\nu_M} = \frac{D_P V_P}{\nu_P} \quad (38)$$

$$k_V = \frac{V_P}{V_M} = \frac{D_M V_P}{D_P V_M} = \frac{k_V}{k_D} \quad (39)$$

$$k_t = \frac{k_D}{k_V} = \frac{k_D^2}{k_V} \quad (40)$$

$$k_a = \frac{k_V}{k_t} = \frac{k_V}{k_D^3} \quad (41)$$

$$k_F = k_\rho k_V^2 k_D^2 = k_\rho k_V^2 \quad (42)$$

$$k_p = k_F k_D^{-2} = k_\rho k_V^2 k_D^{-2} \quad (43)$$

Przykład 1 ilustrujący rozważane zagadnienie (por. [3])

Ciało sztywne osiowosymetryczne o długości $D_P = 3,0$ m ma być holowane z prędkością $V_P = 4$ m \cdot s⁻¹ głęboko pod powierzchnią wody o temperaturze 15°C. W celu określenia siły potrzebnej do holowania ciała wykonano jego model o długości $D_M = 0,6$ m i przetestowano go w tunelu aerodynamicznym przy prędkości powietrza 20 m/s i temperaturze 15°C. W tych warunkach lepkość dynamiczna wody jest 62,5 razy większa od lepkości powietrza. Na podstawie badań w tunelu aerodynamicznym wyznaczono siłę oporu aerodynamicznego równą 100 N.

W analizowanym przypadku właściwym kryterium podobieństwa jest kryterium Reynoldsa. Model został wykonany w skali: $k_D = 3,0/0,6 = 5$. Także skale prędkości i lepkości dynamicznej są zdeterminowane: $k_V = 4/20 = 0,2$; $k_\mu = 62,5$. Ponieważ ze związku $\nu = \mu/\rho$ wynika $k_\nu = k_\mu/k_\rho$, więc warunek $Re_P = Re_M$ może być spełniony przez stosowny dobór skali gęstości $k_\rho = \frac{\rho_P}{\rho_M}$. Na tę wielkość można wpływać przez dobór ciśnienia powietrza w badaniach modelowych. Wyłania się więc konieczność stosowania tunelu ciśnieniowego. Obliczmy najpierw wymagane ciśnienie powietrza w tunelu.

Z równości liczb Reynoldsa wynika następująca zależność dla skal odpowiednich wielkości:

$$\frac{k_\rho k_V k_D}{k_\mu} = 1 \rightarrow k_\rho = \frac{k_\mu}{k_V k_D} = \frac{62,5}{0,2 \cdot 5} = 62,5$$

Ponieważ gęstość wody wynosi: $\rho_P = 1000$ kg/m³, więc żądana gęstość powietrza wynosi:

$$\rho_M = \frac{\rho_P}{k_\rho} = \frac{1000}{62,5} = 16$$
 kg \cdot m⁻³

Powietrze o temperaturze 15°C ma taką gęstość przy ciśnieniu 1,2 MPa. Model należy zatem przetestować w tunelu aerodynamicznym ciśnieniowym przy takim właśnie ciśnieniu.

Dla obliczenia skali sił wykorzystujemy wzór (42):

$$k_F = k_\rho k_V^2 k_D^2 = 62,5 \cdot 0,2^2 \cdot 5^2 = 62,5$$

Ostatecznie holowanie obiektu pod wodą wymaga siły:

$$F_p = k_F F_M = 62,5 \cdot 100 = 6250 \text{ N} = 6,25 \text{ kN}$$

3.2. Stosunek globalnej siły bezwładności do globalnej siły ciężkości – liczba Froude’a Fr

Typowym zjawiskiem związanym z działaniem grawitacji jest tworzenie się fal na swobodnej powierzchni cieczy. Są one źródłem oporu falowego, jaki napotyka każde ciało ślizgające się po tej powierzchni lub płynące przy częściowym zanurzeniu w cieczy. Oczywiście w jednym i drugim przypadku pewien udział w oporze całkowitym ma również opór lepki.

Rozważając same tylko globalne siły bezwładności i ciężkości, ich stosunek nazywany jest liczbą Froude’a, na cześć Williama Froude’a, który wykonał doświadczenia z płaskimi płytami holowanymi na wodzie w celu oszacowania oporów statków spowodowanych działaniem fal powierzchniowych. Stosunek globalnych sił bezwładności do ciężkości wynosi:

$$F_{gf}^{if} = \frac{F_{if}}{F_{gf}} \triangleq Fr = \frac{\rho_f V_{rel}^2 D_f^2}{g \rho_f D_f^3} = \frac{V_{rel}^2}{g D_f}, \quad V_{rel} = \begin{cases} V_s \\ V_t \\ V_s - V_t \end{cases} \quad (44)$$

W tym przypadku jako wymiar charakterystyczny D_f jest przyjmowana głębokość zbiornika D_d albo wymiar ciała D_s .

Częściej w zastosowaniach, jako liczbę Froude’a definiuje się pierwiastek z wyrażenia (44), gdyż wówczas V_{rel} występuje w pierwszej potęgze, podobnie jak w liczbie Re . Wtedy liczbę Fr określa zależność:

$$Fr = \frac{V_{rel}}{\sqrt{g D_f}} \quad (45)$$

Siły ciężkości i bezwładności dominują zwykle w następujących zagadnieniach [2]: działanie fal wodnych generowanych przez statek; przepływ wody w kanałach otwartych; działanie strumienia wody na słup podporowy mostu; przepływ wody nad przelewem spływowym; wypływ strumienia płynu z kryzy itp.

Z porównania zależności (37) i (44) wynika, że obydwie te kryteria podobieństwa nie mogą być spełnione jednocześnie, gdy płyn ma tę samą lepkość, ponieważ kryterium Reynoldsa implikuje zmianę prędkości odwrotnie proporcjonalnie do D_f , podczas gdy z kryterium Froude’a wynika zmiana prędkości zgodnie z $\sqrt{D_f}$. W tym sensie kryteria Reynoldsa i Froude’a należy uznać za wzajemnie sprzeczne. Jeżeli tarcie i grawitacja są brane pod uwagę, powinno się zdecydować, który z tych czynników jest ważniejszy albo bardziej użyteczny. W przypadku np. statku [2], holowanie modelu w wodzie daje sumaryczny jego opór, z którego należy wydzielić empirycznie wyznaczony opór tarcia, aby określić opór falowy, który może się okazać mniejszy niż opór tarcia. Ale dla tej samej liczby Froude’a opór falowy statku w pełnej skali może być wyznaczony na podstawie wyników badań modelowych. Wtedy dodaje się do oporu falowego obliczony opór tarcia, aby otrzymać opór sumaryczny statku w skali naturalnej.

W sytuacji oporu projektowanego statku można też postąpić następująco [3]: określić się na podstawie badań modelowych wykonanych przy prędkości odpowiedniej V_{Fr} wynikającej z kryterium Froude’a, a następnie poprawkę na wpływ lepkości szacuje się przez ekstrapolację wyników uzyskanych na kilku modelach wykonanych w różnej skali.

Przy przenoszeniu na obiekt wyników pomiarów uzyskanych na modelu z zachowaniem równości (45), korzystamy ze wzorów na skale:

– prędkości

$$k_V = \frac{V_P}{V_M} = \frac{\sqrt{g_P D_P}}{\sqrt{g_M D_M}} = \sqrt{\frac{D_P}{D_M}} = \sqrt{k_D} \quad (46)$$

– czasu (np. okresu fali)

$$k_t = k_D k_V^{-1} = \sqrt{k_D} \quad (47)$$

– sił

$$k_F = k_\rho k_V^2 k_D^2 = k_\rho k_D^3 \quad (48)$$

W zagadnieniach przepływu wody w kanałach otwartych [2] tarcie płynu jest czynnikiem istotnym, podobnie jak grawitacja i bezwładność, więc widocznie występują tu podobne trudności. Jednakże dla przepływów cieczy w kanałach otwartych występuje zwykle w pełni rozwinięta turbulencja tak, że straty tarcia hydraulicznego są praktycznie proporcjonalne do V_f^2 , jak to będzie pokazane dalej, a więc tarcie płynu w kanałach otwartych jest z rzadkimi wyjątkami niezależne od liczby Reynoldsa i w konsekwencji jest funkcją tylko samej liczby Froude'a.

Jedynym sposobem równoczesnego spełnienia kryteriów Reynoldsa i Froude'a dla modelu i jego prototypu jest użycie płynów o różnych lepkościach w tych dwóch przypadkach. Czasami można to zrealizować, lecz często jest to albo niepraktyczne lub niemożliwe.

Gdy obliczamy liczbę Fr , długość D powinna być wymiarem liniowym, który jest istotny w formie przepływu. Na przykład dla statku jest to zwykle długość tzw. linii wodnej, natomiast dla kanałów otwartych przyjmuje się zwykle głębokość przepływu.

Przykład 2 ilustrujący rozważane zagadnienie (por. [2]).

Model łódki wykonany w skali 1:50 ma opór falowy 0,02 N przy prędkości łódki 1,0 m/s. Należy wyznaczyć odpowiedni opór falowy prototypu, moc silnika wymaganą dla prototypu i prędkość prototypu łódki w tym teście.

Siły ciężkości i bezwładności tu dominują, zatem należy skorzystać z kryterium Froude'a:

$$Fr_P = Fr_M \rightarrow \left(\frac{V}{\sqrt{gD}} \right)_P = \left(\frac{V}{\sqrt{gD}} \right)_M \rightarrow \frac{V_P^2}{D_P} = \frac{V_M^2}{D_M}$$

Zatem:

$$\frac{V_P^2}{V_M^2} = k_V^2 = \frac{D_P}{D_M} = k_D = 50$$

Ponieważ:

$$k_F = k_\rho k_V^2 k_D^2 = k_D^3$$

stąd:

$$F_P = k_D^3 F_M = 50^3 \cdot 0,02 = 2500\text{N} = 2,5\text{kN}$$

$$V_P = \sqrt{k_D} \cdot V_M = \sqrt{50} \cdot 1 = 7,1\text{m/s}$$

$$P_P = F_P \cdot V_P = 2,5 \cdot 7,1 = 17,75\text{kNm/s} = 17,75\text{kW}$$

3.3. Stosunek globalnej siły oporu falowego dla pływającego ciała (np. statku) do globalnej siły bezwładności płynu

Rozpatrzmy zagadnienie oporu falowego ciała płynącego po powierzchni pofalowanego płynu, pozostającego poza tym w bezruchu. Niech ciało o wymiarze charakterystycznym D_s porusza się z prędkością V_s , zaś fala powierzchniowa biegnąca w stronę ciała pływającego ma parametry: V_w – prędkość fali; A_w – amplituda fali; λ_w – długość fali.

Zdefiniujemy liczbę podobieństwa wynikającą w tym przypadku ze stosunku globalnej siły oporu falowego do globalnej siły bezwładności płynu:

$$F_{if}^w = \frac{F_w}{F_{if}} \triangleq \Pi_{if}^w = \frac{A_w \lambda_w^{-1} \rho_f V_w^2 D_s^2}{\rho_f V_s^2 D_s^2} = \frac{A_w}{\lambda_w} \cdot \left(\frac{V_w}{V_s}\right)^2 \quad (49)$$

Z powyższej relacji widać, że liczbami kryterialnymi są w tym przypadku liczby: A_w/λ_w i V_w/V_s .

3.4. Stosunek lokalnych sił ciśnienia powierzchniowego ciała / cząstki do lokalnych sił bezwładności płynu – liczba Eulera, współczynnik ciśnienia C_p

Bezwymiarowa wielkość odniesiona do stosunku lokalnych sił ciśnienia powierzchniowego do lokalnych sił bezwładności jest znana jako liczba Eulera Eu . Można ją wyrazić na kilka sposobów; jedną z form jest:

$$F_{if}^{\Delta p_o} = \frac{F_{\Delta p_o}}{F_{if}} \triangleq Eu = \frac{\Delta p_o d^2}{\rho_f V_f^2 d^2} = \frac{\Delta p_o}{\rho_f V_f^2} \quad (50)$$

gdzie: $d = d_f = d_s = d_p$.

W aerodynamice i hydrodynamice różnych obiektów inżynierskich częściej zamiast liczby Eu używa się tzw. współczynnika ciśnienia C_p , który jest także bezwymiarowy, zdefiniowanego następująco:

$$C_p = \frac{\Delta p_o}{\frac{1}{2} \rho_f V_f^2} = \frac{\Delta p_o}{q_f} \quad (51)$$

gdzie: $q_f = \frac{1}{2} \rho_f V_f^2$ – tak zwane ciśnienie prędkości strumienia / wiatru lub ciśnienie dynamiczne przepływu.

Zarówno liczby Eu oraz C_p są ważnymi kryteriami podobieństwa dynamicznego ale głównie w przepływie nieściśliwym, bowiem ciśnienie i gęstość traktuje się tu jako parametry niezależne. Obydwie te liczby zależą przede wszystkim od liczby Re .

W dynamice gazów – gdy przepływowi gazu towarzyszą małe zmiany ciśnienia – używa się współczynnika ciśnienia C_p zdefiniowanego następująco:

$$C_p = \frac{\Delta p_f}{\frac{1}{2}\bar{\rho}V_f^2} \quad (52)$$

gdzie $\bar{\rho}$ oznacza gęstość średnią w przedziale ciśnień ($p_f - \Delta p_f; p_f + \Delta p_f$).

Jeśli tylko ciśnienie i bezwładność mają wpływ na przepływ, liczba Eulera dla dowolnej formy brzegu będzie pozostawać stałą. Jeśli natomiast inne parametry (lepkość, ściślność, grawitacja itp.) powodują, że forma przepływu ulega zmianie, liczba Eu także będzie się zmieniać.

3.5. Stosunek lokalnych sił ciśnienia powierzchniowego do lokalnych sił lepkości powierzchniowej

W tym przypadku liczba podobieństwa przybiera postać:

$$F_{vo}^{\Delta p_o} = \frac{F_{\Delta p_o}}{F_{v_o}} \triangleq \frac{\Delta p_o d_o^2}{\mu_f V_f d_o} = \frac{\Delta p_o d_o}{\mu_f V_f} = \frac{C_p \frac{1}{2} \rho_f V_f^2 d_o}{\mu_f V_f} = \frac{1}{2} C_p \cdot Re \quad (53)$$

Ponieważ wartości współczynnika ciśnienia są liczbami rzędu 1, z zależności powyższej wynika, że dla liczb Reynoldsa większych od 10 (zdecydowana większość przypadków w aerodynamice i hydrodynamice stosowanej) lokalne siły lepkości powierzchniowej są na ogół pomijalnie małe w porównaniu z lokalnymi siłami ciśnienia powierzchniowego. Wyjątek stanowią bardzo powolne przepływy wokół ciał o małych rozmiarach (np. cząstek lub mikrocząstek materialnych).

W przypadku ruchu ciała stałego z prędkością V_s w rezerwarze nieruchomego płynu, zamiast V_f należy w powyższej zależności podstawić V_s .

3.6. Stosunki globalnych sił ciśnienia powierzchniowego ciała / cząstki do globalnych sił i momentów sił bezwładności płynu – współczynniki sił i momentów aerodynamicznych / hydrodynamicznych C_{oj} i C_{moj}

– współczynniki sił i momentów aerodynamicznych / hydrodynamicznych

$$F_{if}^{\Delta p_{oj}} = \frac{F_{\Delta p_{oj}}}{F_{if}} \triangleq \frac{\Delta p_o C_{oj}^* D_o^2}{\rho_f V_f^2 D_o^2} = 2C_p^* C_{oj}^* = C_{oj}^{**} (Re, (\check{G})) \quad (54)$$

gdzie: (\check{G}) – zbiór bezwymiarowych parametrów geometrycznych charakteryzujących geometrię ciała stałego / cząstki materialnej.

W zastosowaniach praktycznych powyższą zależność przepisuje się w następującej postaci:

$$F_{\Delta p_{oj}} = \frac{1}{2} \rho_f V_f^2 D_o^2 C_{oj}; \quad C_{oj} = C_{oj} (Re, (\check{G})) \quad (55)$$

gdzie: C_{oj} – współczynniki sił aerodynamicznych / hydrodynamicznych ciała / cząstki: C_x – współczynnik oporu, C_y , C_z – współczynniki sił pionowej i bocznej.

– współczynniki momentów aerodynamicznych / hydrodynamicznych

$$M_{if}^{\Delta p_{oj}} = \frac{M_{\Delta p_{oj}}}{M_{if}} \triangleq \frac{\Delta p_o C_{moj}^* D_o^3}{\rho_f V_f^2 D_o^3} = 2C_p^* C_{moj}^* = C_{moj}^{**} (Re, (\check{G})) \quad (56)$$

$$M_{\Delta p_{oj}} = \frac{1}{2} \rho_f V_f^2 D_o^3 C_{m_{oj}}; \quad C_{m_{oj}} = C_{m_{oj}}(Re, (\check{G})) \quad (57)$$

gdzie: $C_{m_{oj}}$ – współczynniki momentów aerodynamicznych / hydrodynamicznych ciała / cząstki; C_{m_x} – współczynnik momentu obracającego; C_{m_y} – współczynnik momentu pochylającego; C_{m_z} – współczynnik momentu odchyłającego.

3.7. Stosunki globalnych sił i momentów sił szorstkości / tarcia powierzchniowego ciała / cząstki do globalnych sił i momentów sił bezwładności płynu – współczynniki sił i momentów aerodynamicznych / hydrodynamicznych szorstkości / tarcia powierzchniowego C_{roj} i C_{mroj}

Szorstkość powierzchni brzegowej ciała stałego może mieć istotny wpływ na wartości sił i momentów aerodynamicznych / hydrodynamicznych wywieranych przez płyn na ciało stałe. Wówczas obok liczby Reynoldsa należy uwzględnić jeszcze inne liczby kryterialne związane z szorstkością powierzchni ciała, zdefiniowane np. jako:

– współczynniki sił szorstkości / tarcia powierzchniowego

$$F_{if}^{roj} = \frac{F_{roj}}{F_{if}} \triangleq \frac{\mu_{ro}^* \Delta p_o C_{roj} D_o^2}{\rho_f V_f^2 D_o^2} = 2C_p \mu_{ro}^* C_{roj}^* = C_{roj}^{**}(Re, (\check{G})) \quad (58)$$

$$F_{roj} = \frac{1}{2} \rho V_f^2 D_o^2 C_{roj}; \quad C_{roj} = C_{roj}(Re, (\check{G})) \quad (59)$$

gdzie: C_{roj} – współczynniki sił szorstkości / tarcia powierzchniowego ciała / cząstki

– współczynniki momentów sił szorstkości / tarcia powierzchniowego

$$M_{if}^{roj} = \frac{M_{roj}}{M_{if}} \triangleq \frac{\mu_{ro}^* \Delta p_o C_{mroj} D_o^3}{\rho_f V_f^2 D_o^3} = 2C_p \mu_{ro}^* C_{mroj}^* = C_{mroj}^{**}(Re, (\check{G})) \quad (60)$$

$$M_{roj} = \frac{1}{2} \rho V_f^2 D_o^3 C_{mroj}; \quad C_{mroj} = C_{mroj}(Re, (\check{G})) \quad (61)$$

gdzie: C_{mroj} – współczynniki momentów sił szorstkości / tarcia powierzchniowego ciała / cząstki.

W przypadku, gdy ciało stałe porusza się w rezerwuarze płynu, który poza obszarem oddziaływania ciała jest nieruchomy, prędkość płynu V_f należy zastąpić prędkością ciała / cząstki V_o .

Szorstkość / chropowatość modelu powinna być wyskalowana w takim samym stosunku jak inne wymiary liniowe, co oznacza że mały model powinien mieć powierzchnie znacznie gładziej niż powierzchnia prototypu. Wymaganie to nakłada jednak pewne granice na skalę modelowania geometrycznego, która może być użyta jeśli rzeczywiste podobieństwo geometryczne ma być spełnione. Jednakże w przypadku modelu rzeki wykonanego w skali pionowej większej niż skala horyzontalna, może okazać się koniecznością uczynienie odpowiednio szorstkiej powierzchni modelu w celu symulowania warunków przepływu jak w strumieniu rzeczywistym [2]. Nie ma prostych reguł w sytuacjach, gdy w modelu nie zapewnia się właściwych warunków podobieństwa geometrycznego chropowatości powierzchni; zastępcza,

efektywna szorstkość powinna być wyznaczona na podstawie kilku prób, aż warunki przepływu okażą się typowe dla tych w prototypie.

3.8. Stosunek lokalnych sił bezwładności do lokalnych sił sprężystych płynu – liczba Cauchy’ego Ca , liczba Macha Ma

Gdy ściśliwość płynu jest istotna, konieczne należy rozważyć stosunek lokalnych sił bezwładności płynu do lokalnych sił sprężystych płynu, zwany liczbą Cauchy’ego Ca .

Zatem:

$$F_{ef}^{if} = \frac{F_{if}}{F_{ef}} \triangleq Ca = \frac{\rho_f V_f^2 a_f^2}{K_f d_f^2} = \frac{\rho_f V_f^2}{K_f} \quad (62)$$

Biorąc pod uwagę, że prędkość fali akustycznej (lub dźwięku) c_f w rozważanym ośrodku materialnym określa wzór:

$$c_f = \sqrt{\frac{K_f}{\rho_f}} \quad (63)$$

Liczbę Cauchy’ego można wyrazić także jako:

$$Ca = \frac{v_f^2}{c_f^2} = \left(\frac{v_f}{c_f}\right)^2 = Ma^2 \quad (64)$$

gdzie: Ma – tak zwana liczba Macha, na cześć uczonego Austriaka Macha.

Między liczbami Re i Ma również istnieje pewien związek, istotny przy modelowaniu przepływu gazów rozrzedzonych [3]. Z kinetycznej teorii gazów wiadomo, że lepkość kinematyczna jest proporcjonalna do średniej długości Λ drogi swobodnej cząstek oraz do prędkości dźwięku: $v \sim c_f \Lambda$. Stosunek:

$$\frac{Ma}{Re} \sim \frac{\Lambda}{l} = Kn \quad (65)$$

zwany jest liczbą Knudsen, gdzie l jest charakterystyczną długością odniesienia. Rozrzedzony gaz może być dopóty traktowany jako ośrodek ciągły, dopóki droga swobodnego przebiegu cząstek jest bardzo mała wobec l , czyli dla $Ma \ll Re$; z reguły przyjmuje się $Ma < 10^{-3} Re$.

Z tego punktu widzenia w warstwie przyściennej (o grubości δ) rozróżnia się cztery rodzaje przepływów gazu:

1. $\Lambda/\delta < 0,01$ – gaz może być traktowany jako ośrodek ciągły.
2. $0,01 < \Lambda/\delta < 0,1$ – droga swobodna cząstek jest już porównywalna z grubością warstwy i występują nieciągłości profilu prędkości oraz temperatury; stąd nazwa – przepływ poślizgowy. Chcąc analizować te nieciągłości, trzeba uwzględnić cząsteczkową budowę gazu, czyli stosować kinetyczną teorię gazów.
3. $\Lambda/\delta > 0,1$ i $\Lambda/l < 10$ – przepływ też ma charakter poślizgowy, przy czym droga swobodnego przebiegu cząstek może być tego samego rzędu co charakterystyczna długość odniesienia.
4. $\Lambda/l > 10$ – odległości między cząstkami są tak duże, iż można pomijać ich wzajemne zderzenia; stąd nazwa – przepływ swobodnomolekularny. O jego charakterze decydują jedynie zderzenia cząstek z powierzchnią ciała „opływającego”.

Jeżeli liczba Ma jest mniejsza niż 1, przepływ nazywa się poddźwiękowy; jeśli jest równa 1, przepływ jest dźwiękowy (krytyczny z tzw. falą uderzeniową); gdy $Ma > 1$ przepływ nazywa się naddźwiękowy; przy ekstremalnie dużych wartościach liczby Ma przepływy nazywane są hiperdźwiękowe.

Możliwe jest równoczesne spełnienie kryteriów Macha i Reynoldsa w dwóch przepływach powietrza o jednakowej temperaturze T [3]. Oznacza to możliwość spełnienia dwóch równości:

$$\frac{k_V}{k_c} = 1, \quad \frac{k_D k_V}{k_\nu} = 1 \quad \text{dla} \quad k_T = 1 \quad (66)$$

Dowód tego stwierdzenia przedstawia się następująco. Korzystając z tego, że skala lepkości kinematycznej $k_\nu = k_\mu/k_\rho$, po eliminacji k_V otrzymujemy z wzorów (66):

$$\frac{k_\rho k_D k_c}{k_\mu} = 1 \quad (67)$$

Lepkość dynamiczna płynów jest silnie zależna od temperatury, przy czym dla powietrza zachodzi proporcjonalność $\mu \sim T$, więc $k_\mu = k_T$. Odpowiednia zależność dla prędkości dźwięku ma postać $c \sim \sqrt{T}$, więc $k_c = \sqrt{k_T}$. Podstawienie tych związków w (66) daje $k_\rho k_D / \sqrt{k_T} = 1$ lub dla $k_T = 1$:

$$k_\rho k_D = 1 \quad (68)$$

Tym samym została wykazana niesprzeczność kryteriów Macha i Reynoldsa dla dwóch przepływów powietrza o jednakowej temperaturze. W praktyce laboratoryjnej gęstość powietrza w przepływie modelowym, a tym samym skalę gęstości k_ρ , można zmieniać w dość dużym przedziale przez zmianę ciśnienia p . Dlatego badania aerodynamiczne wykonuje się wtedy w tunelach ciśnieniowych.

Na przykład [2], gdy przeprowadzamy badania modelowe poddźwiękowe samolotu w tunelu aerodynamicznym, zwykle konieczne należy przeprowadzać testy przy wysokim ciśnieniu aby spełnić kryterium Reynoldsa bez wprowadzania efektów ściśliwości. Załóżmy np., że $k_D = D_p/D_M = 20$. Jeśli lepkość ν i gęstość ρ powietrza będą takie same w modelu i prototypie, wówczas by spełnić kryterium Reynoldsa: $V_M = 20 \times V_p$. Dla samolotu poruszającego się z normalną prędkością uczyniłoby to liczbę Macha dla modelu znacznie większą od 1, a wówczas efekty ściśliwości powietrza zniekształciłyby znacznie wyniki pomiarów. Jeśli natomiast przeprowadzimy testy pod ciśnieniem 2 MPa (tj. około 20-razy większym od ciśnienia atmosferycznego) i przy takich samych temperaturach modelu i prototypu – wówczas będzie: $\rho_M = 20 \times \rho_p$ i $\mu_M \approx \mu_p$, ponieważ lepkość powietrza zmienia się bardzo mało ze zmianami ciśnienia (lub gęstości). Wtedy model powinien być testowany przy prędkości równej prędkości prototypu, aby liczby Re dla modelu i prototypu były podobne.

Natomiast przy małych prędkościach przepływu gazu (orientacyjnie dla $Ma < 0,3$) podobieństwo pól ciśnień osiąga się przy spełnieniu kryterium Eulera.

3.9. Stosunek lokalnych sił bezwładności do lokalnych sił napięcia powierzchniowego płynu – liczba Webera

W pewnych przypadkach przepływu, napięcie powierzchniowe może mieć znaczący wpływ, ale normalnie jest pomijalne. Stosunek sił bezwładności do sił napięcia powierzchniowego płynu daje:

$$F_{tf}^{if} = \frac{F_{if}}{F_{tf}} \triangleq \Pi_{tf}^{if} = \frac{\rho_f V_f^2 d_f^2}{\sigma_{tf} d_f} = \frac{\rho_f V_f^2 d_f}{\sigma_{tf}} \quad (69)$$

Pierwiastek z tej wielkości bezwymiarowej znany jest jako liczba Webera We :

$$We = \frac{V_f}{\sqrt{\frac{\sigma_{tf}}{\rho_f d_f}}} \quad (70)$$

W przypadku np. modelowania przepływu cieczy w cienkiej warstwie lub strudze po powierzchni ciała stałego, czy też ruchów kapilarnych cieczy, wymagane jest zachowanie podobieństwa pól napięcia powierzchniowego σ_{tf} .

Gdyby w zależności (69) zamiast siły bezwładności F_{if} przyjąć siłę ciężkości F_{gf} wówczas otrzyma się liczbę Bodego zdefiniowaną następująco:

$$F_{tf}^{gf} = \frac{F_{gf}}{F_{tf}} \triangleq \Pi_{tf}^{gf} = \frac{\rho_f g d_f^3}{\sigma_{tf} d_f} = \frac{\rho_f g d_f^2}{\sigma_{tf}} = Bo \quad (71)$$

Liczbę tę stosuje się przy modelowaniu zjawisk mechanicznych zachodzących w warunkach nieważkości lub osłabionej grawitacji ($g < 9,81 \frac{m}{s^2}$).

3.10. Stosunki sił globalnych i wynikające z nich liczby kryterialne w przypadkach ruchów względnych typu unoszenia się lub opadania ciał stałych lub cząstek materialnych zanurzonych w płynie

Przypadek 1: Umiarkowane lub szybkie unoszenie się lub opadanie ciał stałych lub cząstek materialnych w nieruchomym płynie

W rozważanym przypadku decydujące są: siły ciężkości ciała / cząstek F_{go} , siły wyporu wywierane przez płyn na ciało / cząstkę F_{bo} i siły inercji płynu F_{if} . Wobec tego można wprowadzić kolejne liczby kryterialne zdefiniowane następująco:

$$F_{if}^{gb} = \frac{F_{gb}}{F_{if}} \triangleq \begin{cases} \frac{(\rho_o - \rho_f) g D_o^3}{\rho_f V_o^2 D_o^2} = \frac{\Delta \rho}{\rho_f} \cdot \frac{g D_o}{V_o^2} \\ \frac{(\rho_o - \rho_f) V_o^2 D_o^2}{\rho_f V_o^2 D_o^2} = \frac{\Delta \rho}{\rho_f} \cdot \left(\frac{V_o}{V_o} \right)^2 \end{cases} \quad (72) \quad (73)$$

W powyższych zależnościach pojawiły się trzy nowe liczby kryterialne:

– bezwymiarowy parametr masy

$$\Pi_\rho = \frac{\Delta \rho}{\rho_f} \quad (74)$$

– bezwymiarowy parametr prędkości

$$V_o^t = \frac{V_t}{V_o} \quad (75)$$

– liczba Froude'a (lub jej odwrotność) odniesiona do ciała / cząstki

$$Fr_o = \frac{V_o}{\sqrt{gD_o}} \quad (76)$$

Jeśli jako prędkość charakterystyczną V_o przyjmiemy prędkość terminalną, wówczas $V_o^t = 1$, oraz:

$$Fr_o = Fr_t = \frac{V_t}{\sqrt{gD_o}} \quad (77)$$

Przypadek 2: Powolne lub bardzo powolne unoszenie się lub opadanie małych cząstek materialnych w nieruchomym płynie

Gdy mamy do czynienia z powolnymi ruchami typu unoszenia lub opadania małych cząstek materialnych (np. pyłów, mikrocząstek ciał stałych tworzących zawiesiny, lekkich płatków śniegu, pęcherzyków powietrza itp.), decydujące o tych ruchach są: globalne siły ciężkości cząstek F_{gp} , siły wyporu wywierane przez płyn na cząstki F_b i siły lepkości płynu F_{vf} . Adekwatną w tym przypadku liczbą kryterialną byłaby np. liczba:

$$F_{vf}^{gb} = \frac{F_{gb}}{F_{vf}} \triangleq \Pi_{vf}^{gb} = \begin{cases} \frac{(\rho_p - \rho_f)gD_p^3}{\mu_f V_t D_p} = \frac{Ar}{Re_t} \\ \frac{(\rho_p - \rho_f)V_t^2 D_p^2}{\mu_f V_t D_p} = \frac{\Delta\rho}{\rho_f} \cdot Re_t \end{cases} \quad (78) (79)$$

gdzie:

$$Ar = \frac{\Delta\rho}{\rho_f} \cdot \frac{gD^3}{v_f^2}; \quad v_f = \frac{\mu_f}{\rho_f} \quad (80)$$

nazywa się liczbą Archimedesesa, oraz:

$$Re_t = \frac{\rho_f V_t D_p}{\mu_f} \quad (81)$$

można nazwać terminalną liczbą Reynoldsa.

Przypadek 3: Umiarkowany lub szybki ruch płynu o prędkości poziomej V_f i umiarkowany lub szybki ruch względny opadający lub unoszący małych cząstek materialnych o prędkości terminalnej V_t

Przypadek taki dotyczyć może np. opadu śniegu przy wietrze, opadu deszczu przy wietrze, ruchu pęcherzyków powietrza w poruszającym się poziomo płynie itp.

Adekwatnymi w tym przypadku mogą być np. następujące liczby kryterialne:

$$F_{if}^{gbs} = \frac{F_{gbs}}{F_{if}} \triangleq \Pi_{if}^{gb} = \begin{cases} \frac{\Delta\rho g D_p^3}{\rho_f V_f^2 D_p^2} = \frac{\Delta\rho}{\rho_f} \cdot \frac{1}{Fr^2} \\ \frac{\Delta\rho V_t^2 D_p^2}{\rho_f V_f^2 D_p^2} = \frac{\Delta\rho}{\rho_f} \cdot \left(\frac{V_t}{V_f}\right)^2 \end{cases} \quad (82)$$

$$F_{if}^{ip} = \frac{F_{ip}}{F_{if}} \triangleq \Pi_{if}^{ip} = \begin{cases} \frac{\rho_p g D_p^3}{\rho_f V_f^2 D_p^2} = \frac{\rho_p}{\rho_f} \cdot \frac{1}{Fr^2} \\ \frac{\rho_p V_t^2 D_p^2}{\rho_f V_f^2 D_p^2} = \frac{\rho_p}{\rho_f} \cdot \left(\frac{V_t}{V_f}\right)^2 \end{cases} \quad (83)$$

Jak widać, tak w jednej jak i drugiej liczbie kryterialnej pojawiają się bezwymiarowe wielkości związane z masą $\left(\frac{\Delta\rho}{\rho_f}$ lub $\frac{\rho_p}{\rho_f}\right)$ – które można nazwać liczbami podobieństwa masy – oraz liczbą Froude’a Fr lub bezwymiarowa wielkość związana z prędkością V_t/V_f . Tę ostatnią liczbę podobieństwa:

$$V_f^t = \frac{V_t}{V_f} \quad (84)$$

lub jej odwrotność, można nazwać liczbą podobieństwa kinematycznego.

Literatura

- [1] Flaga A. *Inżynieria wiatrowa. Podstawy i zastosowania*. Arkady, Warszawa 2008.
- [2] Daugherty R.L., Franzini J.B. *Fluid Mechanics with engineering applications*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1977.
- [3] Gryboś R. *Podstawy mechaniki płynów. Część I i II*. Wydawnictwa Naukowe PWN, Warszawa 1998.

Ratios of forces and forces moments as dynamic similarity criteria of various phenomena occurring in wind engineering, snow engineering and fluid dynamics

Part I – Fundamentals and steady problems

Andrzej Flaga

Faculty of Civil Engineering, Institute of Structural Mechanics, Cracow University of Technology
e-mail: liwpk@windlab.pl

Abstract: The work concerns dynamic similarity criteria of various phenomena occurring in wind engineering, snow engineering and fluid dynamics derived from ratios of forces and forces moments affecting these phenomena. Derived and analyzed in part I dynamic similarity criteria, mainly concern the following steady problems: 1. Fluid flows and flows past objects ; 2. Fluid-solid contact problems; 3. Problems of a solid floating on a fluid with and without of the surface waves.

Keywords: dynamic similarity criteria, wind engineering, snow engineering, fluid dynamics, steady problems.