

Stosunki sił i momentów sił jako kryteria podobieństwa dynamicznego różnych zjawisk występujących w inżynierii wiatrowej, inżynierii śniegowej i dynamice płynów

Część II – Zagadnienia nieustalone o charakterze okresowym, quasi-okresowym lub turbulentnym

Andrzej Flaga

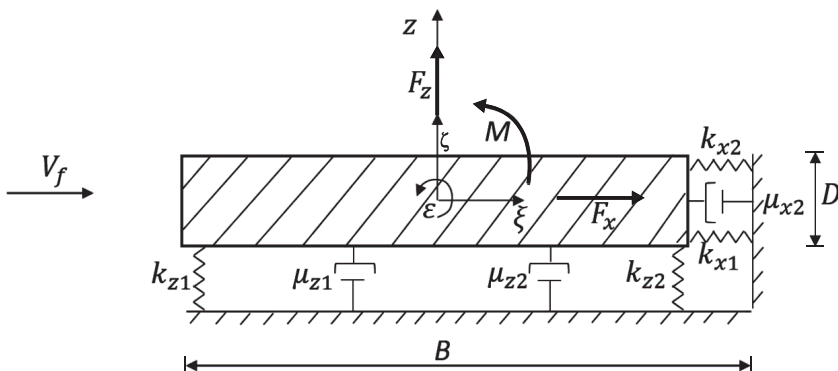
Wydział Inżynierii Lądowej, Instytut Mechaniki Budowli, Politechnika Krakowska
e-mail: livpk@windlab.pl

Streszczenie: Praca dotyczy kryteriów podobieństwa dynamicznego różnych zjawisk występujących w inżynierii wiatrowej, inżynierii śniegowej i dynamice płynów wyprowadzonych ze stosunków sił i momentów sił wpływających na te zjawiska. Wyprowadzone i analizowane w części II kryteria podobieństwa dynamicznego dotyczą głównie następujących zagadnień nieustalonych o charakterze okresowym, quasi-okresowym i turbulentnym: 1. Drgań ciała stałego w nieruchomym lub ruchomym płynie; 2. Odrywania się cząstek/płatek/klastrów śniegowych z wierzchniej warstwy złoża śniegu; 3. Wirujących turbin, śmigieł lub śrub okrętowych.

Słowa kluczowe: kryteria podobieństwa dynamicznego, inżynieria wiatrowa, inżynieria śniegowa, dynamika płynów, zagadnienia ustalone.

1. Stosunki sił i wynikające z nich liczby kryterialne w przypadkach drgań ciał stałych w płynach

Rozpatrzmy to zagadnienie na przykładzie drgań translacyjno – rotacyjnych ciała stałego o trzech stopniach swobody: translacyjnych ξ , ζ i rotacyjnym ϵ , zanurzonego najpierw w nieruchomym a później ruchomym płynie. Model ciała drgającego przyjęto jak na Rys. 1. Jest to ciało stałe sztywne podparte elastyczno – wiskotycznie.



Rys. 1. Układ ideowy z masą, sprężynami i tłumikami wiskotycznymi w przepływającym płynie

Zakładamy, że wymuszenie układu ma składowe statyczne (średnie) – np. wynikające z grawitacji – i dynamiczne (fluktuacyjne). Zajmować się będziemy tylko składowymi dynamicznymi wymuszenia, generującymi drgania układu wokół jego położenia równowagi statycznej.

1.1. Przypadek drgań wymuszonych ciała w płynie nieruchomym (poza obszarem kontaktowym płynu z ciałem stałym) – $V_f = 0$

W rozważanym przypadku należy uwzględnić następujące zbiory składowych globalnych sił i momentów sił:

– związane z właściwościami sprężystymi podpór ciała

$$(F_{eS}) = (F_{kx}, F_{kz}, M_{k\epsilon}) \quad (1)$$

– związane z właściwościami tłumiącymi (wiskotycznymi) podpór ciała

$$(F_{dS}) = (F_{\mu x}, F_{\mu z}, M_{\mu\epsilon}) \quad (2)$$

– związane z właściwościami tłumiącymi (wiskotycznymi) płynu otaczającego ciało przy ich ruchu względnym

$$(F_{dsf}) = (F_{\mu xf}, F_{\mu zf}, M_{\mu\epsilon f}) \quad (3)$$

Zakłada się, że wypadkowe siły i moment siły tłumienia wiskotycznego drgań wynoszą:

$$(F_{d\Sigma}) = (F_{\mu x} + F_{\mu xf}; F_{\mu z} + F_{\mu zf}; M_{\mu\epsilon} + M_{\mu\epsilon f}) \quad (4)$$

– związane z bezwładnością ciała

$$(F_{iS}) = (F_{ix}, F_{iz}, M_{i\epsilon}) \quad (5)$$

– związane z masą związaną płynu

$$(F_{if}) = (F_{ixf}, F_{izf}, M_{i\epsilon f}) \quad (6)$$

Zakłada się, że wypadkowe siły i moment sił bezwładności ciała wynoszą:

$$(F_{i\Sigma}) = (F_{ix} + F_{ixf}; F_{iz} + F_{izf}; M_{i\epsilon} + M_{i\epsilon f}) \quad (7)$$

– związane z wymuszeniem drgań układu

$$(F_a) = (F_x, F_z, M) \quad (8)$$

przy czym:

$$F_x = F_x(t) = F_{ox} \check{F}_x(t; (G_x)) = F_{ox} \check{F}_x^*(\check{t}; (\check{G}_x)) \quad (9)$$

$$F_z = F_z(t) = F_{oz}\check{F}_z(t; (G_z)) = F_{oz}\check{F}_z^*(\check{t}; (\check{G}_z)) \quad (10)$$

$$M = M(t) = M_o\check{M}(t; (G_\varepsilon)) = M_o\check{M}^*(\check{t}; (\check{G}_\varepsilon)) \quad (11)$$

gdzie: F_{ox} , F_{oz} , M_o – amplitudy wymuszenia (lub inne charakterystyczne wielkości wymiarowe wymuszenia); t – czas; $\check{t} = \frac{V_z t}{B}$ – czas bezwymiarowy; (G_x) , (G_z) , (G_ε) ; (\check{G}_x) , (\check{G}_z) , (\check{G}_ε) – wymiarowe i bezwymiarowe zbiory parametrów wymuszenia; $\check{F}_x^*(...)$, $\check{F}_z^*(...)$, $\check{M}^*(...)$ – bezwymiarowe funkcje czasu bezwymiarowego i bezwymiarowych parametrów wymuszenia, które stanowią określone funkcyjne kryteria podobieństwa dla wymuszenia.

Parametry charakteryzujące właściwości mechaniczne rozpatrywanego zagadnienia można pogrupować następująco:

- właściwości sprężyste: sztywności podpór sprężystych

$$(k_s) = (k_x, k_z, k_\varepsilon) \quad (12)$$

- właściwości tłumiące: współczynniki tłumienia wiskotycznego ciała i płynu

$$(\mu_s) = (\mu_x, \mu_z, \mu_\varepsilon); (\mu_f) = (\mu_{xf}, \mu_{zf}, \mu_{\varepsilon f}) \quad (13)$$

- właściwości bezwładnościowe: masy i momenty bezwładności mas ciała i płynu

$$(m_s) = (m, m, J); (m_f) = (m_{xf}, m_{zf}, J_f) \quad (14)$$

- charakterystyki wymuszenia: amplitudy wymuszenia

$$(F_{os}) = (F_{ox}, F_{oz}, M_o) \quad (15)$$

- wymiary charakterystyczne ciała

$$(D_s) = (D, B, L); \Omega_s \quad (16)$$

gdzie: D , B – wymiary poprzeczne ciała; L – długość ciała; Ω_s – objętość ciała,

- gęstości masy ciała i płynu

$$(\rho) = (\rho_s, \rho_f) \quad (17)$$

przy czym:

$$\rho_s \Omega_s = m \quad (18)$$

- charakterystyczna prędkość ciała

$$V_s = V_z \quad (19)$$

W dalszym ciągu rozważań wyznaczmy stosunki składowych odpowiednich sił i momentów sił w odniesieniu do jednej ze składowych sił tak, aby tworzyły one wielkości bezwymiarowe. Powiązane z nimi liczby bezwymiarowe będą odpowiednimi liczbami podobieństwa dynamicznego analizowanego zagadnienia. Jako siłę odniesienia przyjmiemy składową pionową siłę bezwładności ciała i masy związanej płynu, tj.:

$$F_{iz\Sigma} = F_{iz} + F_{izf} \quad (20)$$

Natomiast jako bazę wymiarową przyjmiemy trójelementowy zbiór: (m_Σ, V_z, B) , gdzie:

$$m_\Sigma = m + m_{zf} \quad (21)$$

otrzymamy wtedy następujące zależności:

– liczby kryterialne związane z bezwładnością ciała i płynu

$$F_{iz\Sigma}^{ix\Sigma} = \frac{F_{ix\Sigma}}{F_{iz\Sigma}} \triangleq \pi_{iz\Sigma}^{ix\Sigma} = \frac{(m+m_{zf})V_z^2 B^{-1}}{(m+m_{zf})V_z^2 B^{-1}} = \frac{1+\frac{m_{zf}}{m}}{1+\frac{m_{zf}}{m}} \quad (22)$$

$$F_{iz\Sigma}^{i\varepsilon\Sigma} = \frac{F_{i\varepsilon\Sigma}}{F_{iz\Sigma}} = \frac{M_{i\varepsilon}}{BF_{iz\Sigma}} \triangleq \pi_{iz\Sigma}^{i\varepsilon\Sigma} = \frac{(J+J_f)V_z^2 B^{-2}}{(m+m_{zf})V_z^2} = \frac{J_\Sigma}{m_{z\Sigma}B^2} \quad (23)$$

Wprowadźmy następujące dodatkowe oznaczenia i zależności:

$$m_{xf} = \rho_f \Omega_s \mathcal{K}_x = m_f \mathcal{K}_x \quad (24)$$

$$m_{zf} = \rho_f \Omega_s \mathcal{K}_z = m_f \mathcal{K}_z \quad (25)$$

$$J = mB^2 \mathcal{K} = \rho_s \Omega_s B^2 \mathcal{K} \quad (26)$$

$$J_f = \rho_f \Omega_s B^2 \mathcal{K}_\varepsilon \quad (27)$$

Wówczas liczby kryterialne $\pi_{iz\Sigma}^{ix\Sigma}$ i $\pi_{iz\Sigma}^{i\varepsilon\Sigma}$ można także wyrazić jako:

$$\Pi_{iz\Sigma}^{ix\Sigma} = \frac{1+\frac{\rho_f}{\rho_s}\mathcal{K}_x}{1+\frac{\rho_f}{\rho_s}\mathcal{K}_z} \quad (28)$$

$$\Pi_{iz\Sigma}^{i\varepsilon\Sigma} = \frac{\left(\mathcal{K}+\frac{\rho_f}{\rho_s}\mathcal{K}_\varepsilon\right)}{\left(1+\frac{\rho_f}{\rho_s}\mathcal{K}_z\right)} \quad (29)$$

Jeśli uznać, że wielkość bezwymiarową \mathcal{K} można obliczyć dla danej geometrii ciała, natomiast wielkości bezwymiarowe: \mathcal{K}_x , \mathcal{K}_z , \mathcal{K}_ε można oszacować teoretycznie lub wyznaczyć doświadczalnie dla wybranych geometrii ciał, to jedyną liczbą kryterialną pozostaje tu liczba:

$$\Pi_{\rho fs} = \frac{\rho_f}{\rho_s} \quad (30)$$

– liczby kryterialne związane ze sprężystością podpór ciała stałego

$$F_{iz\Sigma}^{kx} = \frac{F_{kx}}{F_{iz\Sigma}} \triangleq \Pi_{iz\Sigma}^{kx} = \frac{k_x B}{(m+m_{zf})V_z^2 B^{-1}} \quad (31)$$

$$F_{iz\Sigma}^{kz} = \frac{F_{kz}}{F_{iz\Sigma}} \triangleq \Pi_{iz\Sigma}^{kz} = \frac{k_z B}{(m+m_{zf})V_z^2 B^{-1}} \quad (32)$$

$$F_{iz\Sigma}^{k\varepsilon} = \frac{F_{k\varepsilon}}{F_{iz\Sigma}} = \frac{M_{k\varepsilon}}{BF_{iz\Sigma}} \triangleq \Pi_{iz\Sigma}^{k\varepsilon} = \frac{k_\varepsilon}{(m+m_{zf})V_z^2} \quad (33)$$

Wprowadźmy następujące dodatkowe oznaczenia i zależności:

$$\frac{k_x}{m+m_{xf}} = \omega_x^2 \quad (34)$$

$$\frac{k_z}{m+m_{zf}} = \omega_z^2 \quad (35)$$

$$\frac{k_\varepsilon}{J+J_f} = \omega_\varepsilon^2 \quad (36)$$

gdzie: $\omega_x, \omega_z, \omega_\varepsilon$ – tzw. częstości kołowe drgań własnych translacyjnych i rotacyjnych analizowanego układu.

Ponadto wyrażmy prędkość charakterystyczną ciała stałego V_z jako:

$$V_z = \omega_z B \quad (37)$$

Wówczas ostatnie trzy liczby kryterialne można wyrazić jako:

$$\pi_{iz\Sigma}^{kx} = \left(\frac{\omega_x}{\omega_z}\right)^2 \frac{1 + \frac{\rho_f}{\rho_s} \kappa_x}{1 + \frac{\rho_f}{\rho_s} \kappa_z} \quad (38)$$

$$\pi_{iz\Sigma}^{kz} = 1 \quad (39)$$

$$\pi_{iz\Sigma}^{k\varepsilon} = \left(\frac{\omega_\varepsilon}{\omega_z}\right)^2 \frac{\left(\kappa + \frac{\rho_f}{\rho_s} \kappa_\varepsilon\right)}{\left(1 + \frac{\rho_f}{\rho_s} \kappa_z\right)} \quad (40)$$

Jak widać, nowymi liczbami kryterialnymi są tu liczby:

$$\Pi_{\omega xz} = \frac{\omega_x}{\omega_z}, \quad \Pi_{\omega \varepsilon z} = \frac{\omega_\varepsilon}{\omega_z} \quad (41)$$

– liczby kryterialne związane z tłumieniem wiskotycznym ciała i płynu

$$F_{iz\Sigma}^{\mu x \Sigma} = \frac{F_{\mu x \Sigma}}{F_{iz\Sigma}} \triangleq \Pi_{iz\Sigma}^{\mu x \Sigma} = \frac{(\mu_x + \mu_{xf})V_z}{(m+m_{zf})V_z^2 B^{-1}} = \frac{\mu_{x\Sigma}}{m_z \Sigma \omega_z} = \frac{\mu_{x\Sigma}}{m_{x\Sigma}} \cdot \frac{m_{x\Sigma}}{m_z \Sigma} \cdot \frac{1}{\omega_z} \quad (42)$$

$$F_{iz\Sigma}^{\mu z \Sigma} = \frac{F_{\mu z \Sigma}}{F_{iz\Sigma}} \triangleq \Pi_{iz\Sigma}^{\mu z \Sigma} = \frac{(\mu_z + \mu_{zf})V_z}{(m+m_{zf})V_z^2 B^{-1}} = \frac{\mu_{z\Sigma}}{m_z \Sigma} \cdot \frac{1}{\omega_z} \quad (43)$$

$$F_{iz\Sigma}^{\mu\varepsilon\Sigma} = \frac{F_{\mu\varepsilon\Sigma}}{F_{iz\Sigma}} \triangleq \Pi_{iz\Sigma}^{\mu\varepsilon\Sigma} = \frac{(\mu_\varepsilon + \mu_{\varepsilon f})V_z B^{-1}}{B(m+m_{zf})V_z^2 B^{-1}} = \frac{\mu_{\varepsilon\Sigma}}{m_{z\Sigma}} \cdot \frac{1}{B^2 \omega_z} = \frac{\mu_{\varepsilon\Sigma}}{J_\Sigma} \cdot \frac{J_\Sigma}{m_{z\Sigma}} \cdot \frac{1}{B^2 \omega_z} \quad (44)$$

Wprowadźmy kolejne oznaczenia i zależności:

$$\frac{\mu_{x\Sigma}}{m_{x\Sigma}} = 2\gamma_x \omega_x \quad (45)$$

$$\frac{\mu_{z\Sigma}}{m_{z\Sigma}} = 2\gamma_z \omega_z \quad (46)$$

$$\frac{\mu_{\varepsilon\Sigma}}{J_\Sigma} = 2\gamma_\varepsilon \omega_\varepsilon \quad (47)$$

Liczby kryterialne (42), (43) i (44) przyjmą wtedy postać:

$$\Pi_{iz\Sigma}^{\mu x\Sigma} = 2\gamma_x \left(\frac{\omega_x}{\omega_z} \right) \frac{\left(1 + \frac{\rho_f}{\rho_s} \kappa_x \right)}{\left(1 + \frac{\rho_f}{\rho_s} \kappa_z \right)} \quad (48)$$

$$\Pi_{iz\Sigma}^{\mu z\Sigma} = 2\gamma_z \quad (49)$$

$$\Pi_{iz\Sigma}^{\mu \varepsilon\Sigma} = 2\gamma_\varepsilon \left(\frac{\omega_\varepsilon}{\omega_z} \right) \frac{\left(\kappa + \frac{\rho_f}{\rho_s} \kappa_\varepsilon \right)}{\left(1 + \frac{\rho_f}{\rho_s} \kappa_z \right)} \quad (50)$$

Bezwymiarowe współczynniki tłumienia: γ_x , γ_z , γ_ε nazywają się ułamkami tłumienia krytycznego i charakteryzują one stopień tłumienia (zmniejszania się amplitudy) drgań własnych tłumionych translacyjnych i rotacyjnych rozważanego układu.

– liczby kryterialne związane z amplitudami wymuszenia

$$F_{iz\Sigma}^{ox} = \frac{F_{ox}}{F_{iz\Sigma}} \triangleq \Pi_{iz\Sigma}^{ox} = \frac{F_{ox}}{(m+m_{zf})V_z^2 B^{-1}} = \frac{F_{ox}}{k_z B} = \frac{F_{ox}}{k_x B} \cdot \frac{k_x}{k_z} = \frac{\xi_{st}}{B} \cdot \frac{k_x}{k_z} \quad (51)$$

$$F_{iz\Sigma}^{oz} = \frac{F_{oz}}{F_{iz\Sigma}} \triangleq \Pi_{iz\Sigma}^{oz} = \frac{F_{oz}}{(m+m_{zf})V_z^2 B^{-1}} = \frac{F_{oz}}{k_z B} = \frac{\zeta_{st}}{B} \quad (52)$$

$$F_{iz\Sigma}^{o\varepsilon} = \frac{M_o}{BF_{iz\Sigma}} \triangleq \Pi_{iz\Sigma}^{o\varepsilon} = \frac{M_o}{B(m+m_{zf})V_z^2 B^{-1}} = \frac{M_o}{k_z B^2} = \frac{M_o}{k_\varepsilon} \cdot \frac{k_\varepsilon}{k_z B^2} = \varepsilon_{st} \cdot \frac{k_\varepsilon}{k_z B^2} \quad (53)$$

gdzie: ξ_{st} , ζ_{st} , ε_{st} – statyczne przemieszczenia translacyjne i kąt obrotu od amplitud odpowiednich wymuszeń.

1.2. Przypadek drgań wymuszonych ciała w płynie poruszającym się z prędkością V_f

Dodatkowe, odpowiednie stosunki aerodynamicznych / hydrodynamicznych sił i momentu siły do bezwładnościowych sił i momentu siły i wynikające z nich liczby podobieństwa wyniosą wtedy:

$$F_{iz\Sigma}^{\Delta psx} = \frac{F_{\Delta psx}}{F_{iz\Sigma}} \triangleq \Pi_{iz\Sigma}^{\Delta psx} = \frac{\rho_f V_f^2 B^2 C_x}{(m+m_{zf})V_z^2 B^{-1}} = \frac{\rho_f V_f^2 B}{k_z} \cdot C_x \quad (54)$$

$$F_{iz\Sigma}^{\Delta psz} = \frac{F_{\Delta psz}}{F_{iz\Sigma}} \triangleq \Pi_{iz\Sigma}^{\Delta psz} = \frac{\rho_f V_f^2 B^2 C_y}{(m+m_{zf})V_z^2 B^{-1}} = \frac{\rho_f V_f^2 B}{k_z} \cdot C_y \quad (55)$$

$$F_{iz\Sigma}^{\Delta pse} = \frac{M_{\Delta pse}}{BF_{iz\Sigma}} \triangleq \Pi_{iz\Sigma}^{\Delta pse} = \frac{\rho_f V_f^2 B^3 C_m}{B(m+m_{zf})V_z^2 B^{-1}} = \frac{\rho_f V_f^2 B}{k_z} \cdot C_m \quad (56)$$

Jak widać, obok współczynników aerodynamicznych C_x , C_y , C_m pojawiła się tu dodatkowa liczba kryterialna $\rho V_f^2 B/k_z$, którą można wyrazić także inaczej, a mianowicie:

$$\frac{\rho_f V_f^2 B}{k_z} = \frac{\rho_f V_f^2 B}{m_\Sigma f_z^2 4\pi^2} = \frac{\rho_f D^2}{\frac{m_\Sigma}{L}} \cdot \frac{B}{L} \cdot \left(\frac{V_f}{f_z D}\right)^2 \cdot \frac{1}{4\pi^2} = M_\rho \cdot \lambda_B \cdot (V_r)^2 \cdot \frac{1}{4\pi^2} \quad (57)$$

gdzie otrzymane nowe liczby kryterialne nazwano i zdefiniowano następująco:

– bezwymiarowy parametr masy

$$M_\rho = \frac{\rho_f D^2}{\frac{m_\Sigma}{L}} = \frac{\rho_f D^2}{m_\Sigma^*} \quad (58)$$

gdzie: $m_\Sigma^* = \frac{m_\Sigma}{L}$ – gęstość masy sumarycznej na jednostkę długości ciała

– smukłość ciała

$$\lambda_B = \frac{B}{L} \quad (59)$$

– prędkość zredukowana

$$V_r = \frac{V_f}{f_z D} = \frac{1}{\frac{f_z D}{V_f}} = \frac{1}{St_k} \quad (60)$$

gdzie: St_k – kinematyczna liczba Strouhala.

1.3. Odpowiedź dynamiczna układu i związane z tym liczby kryterialne

Odpowiedź dynamiczną rozważanego układu stanowią dwa przemieszczenia translacyjne ξ i ζ oraz kąt obrotu (skręcenia) ε . Zależą one od czasu t oraz zbioru wszystkich parametrów bezwymiarowych układu i wymuszenia, którymi mogą być np. omawiane wyżej liczby kryterialne. Oznaczając zbiory tych parametrów odpowiednio jako: (\check{X}) , (\check{Z}) , (\check{E}) – relacje podobieństwa dla odpowiedzi układu przedstawiają następujące bezwymiarowe zależności funkcyjne:

$$\check{\xi} = \frac{\xi}{B} = \xi(\check{t}; (\check{X})); \quad \check{\zeta} = \frac{\zeta}{B} = \zeta(\check{t}; (\check{Z})); \quad \varepsilon = \check{\varepsilon} = \check{\varepsilon}(\check{t}; (\check{E})) \quad (61)$$

Relacje te pozwolą przenieść wyniki badań odpowiedzi modelu rozważanego układu i wymuszenia, gdy spełnione będą przynajmniej najważniejsze liczby kryterialne omówione wyżej.

2. Zjawisko odrywania się cząstek / płatków / klastrów śniegowych z wierzchniej warstwy złoza śniegu

Zjawisko to jest bardzo złożone i może ono dotyczyć wierzchniej warstwy pokrywy śnieżnej na gruncie, na dachach budynków itp. Od niego zależy dalszy transport (redystrybucja) pokrywy śnieżnej, tworzenie się zasp lub tzw. worków śnieżnych.

Oprócz geometrii wierzchniej warstwy pokrywy śnieżnej, rodzaju i struktury złoża śniegu (złoża uwarstwione o różnych gęstościach poszczególnych warstw: śnieg zbity, mokry, zlodowaciały, puszysty itp), na zjawisko odrywania się cząstek śniegowych z wierzchniej warstwy pokrywy śnieżnej niezbyt zbitego śniegu, mają wpływ głównie następujące siły: siły wynikające z ciśnienia wiatru na powierzchni górnej wierzchniej warstwy; siły ciężkości cząstek w tej warstwie oraz siły spójności poszczególnych cząstek w warstwie górnej podlegającej zjawisku redystrybucji pokrywy śnieżnej przy wiejącym wietrze.

Przyjmujemy, że wielkościami charakterystycznymi dla zjawiska odrywania się cząstek śniegowych są następujące wielkości wymiarowe w warstwie powierzchniowej pokrywy śnieżnej; ciśnienie szczytowe wiatru na górnej powierzchni warstwy ρ_p ; średnia gęstość śniegu ρ_s ; średni wymiar cząstek śniegowych (lub grubość warstwy przypowierzchniowej podlegającej redystrybucji) d_{ps} ; przyspieszenie ziemskie g ; średni współczynnik sił spójności cząstek śniegowych μ_{ps} , który można interpretować jako graniczną wartość naprężenia rozciągającego – wynikającego ze spójności cząstek śniegowych – po przekroczeniu której ma miejsce utrata spójności cząstek śniegowych.

Poszczególne siły mające wpływ na zjawisko oderwania się cząstek śniegowych można wówczas wyrazić następującymi zależnościami sformułowanymi lokalnie na powierzchni zewnętrznej opływającego obiektu:

– siły wynikające z ciśnienia wiatru, normalne do powierzchni górnej pokrywy śnieżnej

$$F_{pp} = p_p d_{ps}^2 = \frac{1}{2} \rho_a V_{ap}^2 C_{pp} d_{ps}^2 \quad (62)$$

gdzie: ρ_a – gęstość masy powietrza atmosferycznego; V_{ap} – prędkość szczytowa wiatru w punkcie referencyjnym przed obiektem, przy czym:

$$V_{ap} = \bar{V}_a + g_v \sigma_{va} = \bar{V}_a \left(1 + g_v \frac{\sigma_{va}}{\bar{V}_a} \right) = \bar{V}_a (1 + g_v I_{va}) \quad (63)$$

gdzie: g_v – współczynnik wartości szczytowej prędkości wiatru (zwykle $\rho_v \in (3; 4)$, średnio $g_v \cong 3,5$); I_{va} – intensywność fluktuacji (turbulencji) napływającego strumienia powietrza (wiatru); C_{pp} – współczynnik ciśnienia szczytowego wiatru określony wzorem:

$$C_{pp} = \frac{\bar{p} + g_p \sigma_p}{\frac{1}{2} \rho_a \bar{V}_a^2} = C_p + g_p \sigma_{Cp} \quad (64)$$

gdzie: \bar{p} – średnie ciśnienie wiatru; g_p – współczynnik wartości szczytowej ciśnienia wiatru (liczba rzędu 4 lub więcej); σ_p – odchylenie standardowe ciśnienia wiatru; $\frac{1}{2} \rho_a \bar{V}_a^2 = q_a$ – ciśnienie prędkości wiatru w punkcie referencyjnym przed obiektem; współczynnik C_{pp} zależy głównie od geometrii obiektu, położenia punktu na powierzchni zewnętrznej obiektu i parametrów napływającego strumienia powietrza (ciśnienia prędkości, profilu wiatru określonego np. wykładnikiem prawa potęgowego, intensywności turbulencji I_{va} , zakresu liczby Reynoldsa Re przy obiektach opływowych bez ostrych krawędzi);

– składowa normalna siły ciężkości

$$F_{gs}^\alpha = \rho_s g d_{ps}^3 \cos \alpha \quad (65)$$

gdzie: α – kąt pochylenia połaci dachowej (ogólniej – powierzchni górnej wierzchniej warstwy);

– siły spójności w kierunku normalnym do powierzchni górnej wierzchniej warstwy

$$F_{cs} = \mu_{cs} d_{ps}^2 \quad (66)$$

Aby wystąpiło zjawisko oderwania cząstek śniegu, przy przyjętym modelu tego zjawiska, powinna być spełniona nierówność:

$$\begin{aligned} \frac{F_{pp} - F_{gs}^a}{F_{cs}} &= \frac{\frac{1}{2} \rho_a \bar{V}_a^2 (1 + \rho_v I_{va})^2 C_{pp} d_{ps}^2 - \rho_s g d_{ps}^3 \cos \alpha}{\mu_{cs} d_{ps}^2} \\ &= \left[\frac{1}{2} (1 + g_v I_{va})^2 C_{pp} - \frac{\rho_s}{\rho_a} \cdot \frac{g d_{ps}}{\bar{V}_a^2} \cdot \cos \alpha \right] \cdot \frac{\rho_a \bar{V}_a^2}{\mu_{cs}} = \Pi_{\mu_{cs}} > 1 \end{aligned} \quad (67)$$

Liczba kryterialna $\Pi_{\mu_{cs}}$, właściwa dla analizowanego zjawiska, zawiera w sobie następujące szczegółowe liczby kryterialne: $I_{va} = \sigma_{va} / \bar{V}_a$; C_{pp} ; ρ_s / ρ_a ; $\frac{g d_{ps}}{\bar{V}_a^2} = \frac{1}{(Fr_{ps})^2}$; α ; $\rho_a \bar{V}_a^2 / \mu_{cs}$.

Zwykle spełnienie kryterium $(\Pi_{\mu_{cs}})_M = (\Pi_{\mu_{cs}})_P$ może stanowić dość duży problem badawczy. Jednak spełnienie warunku: $(\Pi_{\mu_{cs}})_M > 1$, gdy $(\Pi_{\mu_{cs}})_P > 1$, już takim problemem nie musi być i zależy od rodzaju materiału sypkiego symulującego cząstki śniegu w badaniach modelowych redystrybucji pokrywy śnieżnej.

3. Kryteria podobieństwa zjawisk okresowych – Liczba Strouhala St (jednoczesności)

3.1. Odrywanie się wirów i wzbudzenie wirowe

Zjawisko odrywania się wirów i związane z nim wzbudzenie wirowe smukłych elementów konstrukcyjnych lub konstrukcji o osi podłużnej usytuowanej normalnie do przepływu, są zjawiskami okresowymi lub quasi-okresowymi. Rozważmy stosunek dwóch globalnych sił przypadających na jednostkę długości konstrukcji smukłej, a mianowicie: globalnej amplitudy siły wzbudzenia wirowego F_{os}^v i globalnej siły bezwładności napływającego płynu F_{if} . Niech parametrem amplitudy siły poprzecznej wzbudzenia wirowego będzie częstotliwość odrywania się wirów f^v . Przyjmując pozostałe parametry jak poprzednio, otrzymamy:

$$F_{if}^{vos} = \frac{F_{os}^v}{F_{if}} \triangleq \Pi_{if}^{vos} = \frac{f^v \rho_f V_f D_s^2}{\rho_f V_f^2 D_s} = \frac{f^v D_s}{V_f} = St_v \quad (68)$$

Ponieważ częstotliwość odrywania się wirów i ich konfiguracja za ciałem (tzw. ścieżka wirowa) zależą od śladu aerodynamicznego / hydrodynamicznego za ciałem – a ten z kolei zależy od liczby Re – stąd też w ogólności należy przyjąć, że:

$$St_v = St_v(Re; (\check{G})) \quad (69)$$

Gdy zjawisko odrywania się wirów ma charakter rezonansowy (tj. $f^v = f_y$ gdzie f_y jest częstotliwością drgań własnych poprzecznych ciała), wówczas można napisać:

$$V_c^v = \frac{f_y D_s}{St_v} \quad (70)$$

3.2. Wirujące turbiny, śmigła, śruby okrętowe itp.

Rozpatrzmy stosunek dwóch globalnych sił bezwładności płynu na jednostkę długości wirującej łopaty wirnika / śmigła / śruby, a mianowicie: siły obwodowej $F_{if\theta}$ leżącej w płaszczyźnie wirnika, normalnej do łopaty; siły osiowej F_{ifx} równoległej do prędkości napływającego strumienia płynu V_f (lub prędkości osiowej względnej strumienia płynu i poruszającego się wirnika). Niech parametrem siły bezwładności $F_{if\theta}$ będzie prędkość obwodowa łopaty V_θ , przy czym:

$$V_\theta = \omega R = 2\pi nR \quad (71)$$

gdzie: ω – prędkość kątowa wirowania; R – promień wirnika, n – częstość wirowania (tj. liczba obrotów w jednostce czasu). Pozostałe parametry przyjmijmy jak poprzednio: Wówczas będzie:

$$F_{ifx}^{if\theta} = \frac{F_{if\theta}}{F_{ifx}} \triangleq \Pi_{ifx}^{if\theta} = \frac{V_\theta \rho_f V_f D_s}{\rho_f V_f^2 D_s} = \frac{V_\theta}{V_f} = \frac{\omega R}{V_f} = 2\pi \frac{nR}{V_f} \quad (72)$$

Otrzymane tu liczby kryterialne noszą nazwy:

– wyróżnik szybkobieżności

$$Z = \frac{\omega R}{V_f} \quad (73)$$

- liczba Strouhala lub jednoczesności

$$St_n = \frac{nR}{V_f} \quad (74)$$

W badaniach modelowych śmigła lub śruby okrętowej za wymiar charakterystyczny przyjmuje się średnicę koła opisanego D . W takim razie $St_n = \frac{nD}{V_f}$, lecz częściej stosuje się odwrotność tej liczby $\frac{1}{St_n} = \lambda$, zwaną posuwem śmigła lub śruby. Dla śrub okrętowych $\lambda = 0,03 \div 3$, a dla śmigieł $\lambda = 0,1 \div 2$.

4. Zagadnienia wentylacji naturalnej, swobodnej konwekcji ciepła i dyfuzji

Zdefiniowane dotąd liczby kryterialne są najbardziej istotne w dynamice płynów i ciał stałych lub cząstek materialnych. Stanowią one drobną część wszystkich liczb kryterialnych, jakimi posługuje się teoria podobieństwa i modelowania dynamicznych zjawisk fizycznych, w tym dynamiki płynów. W zasadzie każde równanie, opisujące jakiś proces fizyczny, dostarcza co najmniej jednej liczby kryterialnej. W zależności od natury zagadnienia, niektóre z nich są wzajemnie zależne. Rozpatrzmy wybrane przykłady w zakresie dynamiki płynów [3].

Modelowanie zjawisk dynamicznych zachodzących w płynach niejednorodnych, o zmiennej gęstości wymaga stosowania liczby Archimedesusa:

$$Ar = \frac{\Delta \rho_f g d^3}{\rho_f \nu^2} \quad (75)$$

gdzie: $\Delta \rho_f$ – zmiana gęstości płynu; d – charakterystyczny wymiar liniowy (np. wysokość mierzona od pewnego poziomu), ν – lepkość kinematyczna płynu.

Jeżeli różnica gęstości $\Delta\rho_f$ spowodowana jest różnicą temperatur ΔT płynu, to czynnik $\Delta\rho_f/\rho_f$ trzeba zastąpić czynnikiem $\beta\Delta T$, gdzie β jest współczynnikiem rozszerzalności cieplnej. Odpowiednią liczbą kryterialną jest w tym przypadku liczba Grashofa Gr zdefiniowana jako:

$$Gr = \beta\Delta T_f \frac{gd^3}{\nu^2} \quad (76)$$

zwana też cieplną liczbą Archimedesesa. Odgrywa ona pewną rolę w zagadnieniach wentylacji naturalnej i swobodnej konwekcji ciepła.

Wypór może wystąpić też w związku z różnicą stężenia Δc domieszki zawartej w ośrodku płynnym. W tym przypadku stosuje się dyfuzyjną liczbę Archimedesesa lub Grashofa:

$$Ar_d = \xi\Delta c \frac{gd^3}{\nu} \quad (77)$$

gdzie $\xi = \frac{1}{\rho_f} \frac{\Delta\rho_f}{\Delta c}$ to współczynnik proporcjonalności.

Proces wymiany masy w postaci dyfuzji, może polegać na ruchach molekularnych lub na przepływie wewnętrznym, jako ruchu pewnej masy płynu względem pozostałej. Kryterium podobieństwa dyfuzji molekularnej można wyprowadzić z równania Ficka (jednowymiarowego):

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D^* \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (78)$$

gdzie D^* to współczynnik dyfuzji molekularnej.

Przyjmując jako wielkości odniesienia charakterystyczny wymiar liniowy d^* i charakterystyczny czas (okres czasu) t^* , i doprowadzając to równanie do postaci bezwymiarowej, otrzymamy adekwatną w tym przypadku liczbę podobieństwa Fo_d , zwaną dyfuzyjną liczbą Fouriera:

$$Fo_d = \frac{D^*t^*}{d^*} \quad (79)$$

W zagadnieniu konwekcyjnej wymiany masy jednowymiarowe równanie tego procesu ma postać:

$$V \frac{\partial c}{\partial x} = D^{**} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (80)$$

gdzie: D^{**} – współczynnik dyfuzji konwekcyjnej.

Kolejna liczba podobieństwa, związana z tym równaniem, nazywa się dyfuzyjną liczbą Pecleta Pe_d i jest zdefiniowana następująco:

$$Pe_d = \frac{vd^*}{D^{**}} \quad (81)$$

Porównując ze sobą dwie ostatnie liczby można w konkretnym przypadku wnioskować o intensywności obu procesów dyfuzji: molekularnej i konwekcyjnej.

Podzielimy liczbę Pe_d przez Re . W wyniku otrzymamy po prostu stosunek lepkości kinematycznej ν do współczynnika dyfuzji konwekcyjnej D^{**} :

$$\frac{Pe_d}{Re} = \frac{\nu}{D^{**}} = Sc \quad (82)$$

zwany liczbą Schmidta lub dyfuzyjną liczbą Prandtla. Dla gazów $Sc \sim 1$. Natomiast lepkość kinematyczna ν cieczy, w szczególności wody w normalnych warunkach, jest rzędu $10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s}$, współczynnik dyfuzji molekuł i jonów w roztworach wodnych $D \sim 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{s}$, więc $Sc \sim 10^3$. Przy wzroście lepkości współczynnik dyfuzji maleje zgodnie ze wzorem $D = \text{const}/\nu$, więc liczba Sc wzrasta proporcjonalnie do ν^2 .

5. Skale podobieństwa i wnioski podsumowujące

Liczby: Reynoldsa, Froude'a i Macha są najczęściej spotykanymi parametrami podobieństwa w mechanice płynów. Skale podobieństwa dla różnych wielkości, wynikające ze spełnienia tych liczb podobieństwa, są zestawione w Tab. 1. Umożliwiają one szybkie wyznaczenie skali podobieństwa (tj. stosunku: „prototyp podzielone przez model”) dla dowolnej pożądanej wielkości w przypadku, gdy dana liczba podobieństwa jest taka sama zarówno w prototypie jak i modelu. Obliczona skala podobieństwa daje oczywiście wiarygodne wyniki tylko w przypadku, jeśli na przepływ płynu ma dominujący wpływ poszczególne liczba podobieństwa.

Na zakończenie rozważań dotyczących stosunków sił jako kryteriów podobieństwa dynamicznego zjawisk mechanicznych, można sformułować następujące podsumowujące konkluzje [1–4]:

1. Otrzymane kryteria podobieństwa umożliwiają nam wykonanie badań modelowych używając powszechnie występujące płyny jak woda i powietrze, a następnie przenieść otrzymane wyniki badań na płyny, które są mniej używane powszechnie jak gaz, para wodna, olej itp.
2. W hydraulice, aerodynamice i aeronautyce, można otrzymać wartościowe rezultaty minimalizując koszty badań, wykonując testy na modelach małej skali urządzeń czy aparatury pełnej skali. Prawa podobieństwa umożliwiają wyznaczenie podstawowych właściwości i charakterystyk prototypu, a więc urządzenia / konstrukcji pełnej skali, z testów wykonanych na modelu. Niekoniecznie należy używać takich samych płynów dla modelu i prototypu. Model nie musi też być zawsze mniejszy niż jego prototyp. I tak np. w przypadku małej pompy odśrodkowej z wodą na wlocie do pompy, można przeprowadzić badania modelowe z powietrzem na wlocie do modelu tej pompy wykonanej w dużej skali. Należy także podkreślić, że model nie musi być koniecznie wykonany w innej skali niż prototyp. W rzeczywistości może to być to samo urządzenie, ale badane przy innych prędkościach innego płynu, który ma znacząco różne właściwości fizyczne niż płyn rzeczywisty.
3. Badania modelowe mogą być stosowane w wielu interdyscyplinarnych zagadnieniach szeroko rozumianej mechaniki stosowanej ciał stałych i płynów, np.: statków w basenach holowniczych, samolotów w tunelach aerodynamicznych, turbin wiatrowych i wodnych, pomp odśrodkowych, maszyn przepływowych, przelewów spływowych zapór, kanałów rzecznych, działania fal i pływów na plażach, erozji gruntu, transportu cząstek stałych, osadów, zawiesin oraz wielu innych.
4. W badaniach modelowych dotyczących przepływów płynów, fundamentalnym zagadnieniem jest uwzględnienie turbulencji w płynie. Jeśli więc prędkości płynu w badaniach modelowych są zbyt małe i dominuje ruch laminarny zamiast turbulentnego, wyniki badań będą obarczone dużymi błędami. Ważnym zagadnieniem, także związanym z turbulencją, jest właściwe zamodelowanie chropowatości powierzchni kontaktowych płynu z ciałem stałym. Ponadto, w badaniach modelowych

należy zapewnić właściwą geometrię w przepływie płynu, tak by wyeliminować wpływ napięć powierzchniowych płynu tam, gdzie one nie są istotne. Na przykład, głębokość wody przepływającej przez grzbiet modelu przelewu sphywowego nie może być zbyt mała.

Tabela 1. Charakterystyczne wielkości w mechanice płynów i związane z nimi skale podobieństwa (tj. stosunki wielkości w prototypie do odpowiadających im wielkości w modelu) [2]

Charakterystyczna wielkość	Wymiar w bazie wymiarowej (L,M,T)	Skale podobieństwa wynikające z liczb podobieństwa		
		Reynoldsa	Froude'a	Macha
Geometryczna:				
Długość	$[L]^1$	k_D	k_D	k_D
Pole	$[L]^2$	k_D^2	k_D^2	k_D^2
Objętość	$[L]^3$	k_D^3	k_D^3	k_D^3
Kinematyczna:				
Czas	$[T]^1$	$k_D^2 k_\rho$	$k_D^{\frac{1}{2}} k_g^{-\frac{1}{2}}$	$k_D k_\rho^{\frac{1}{2}} k_K^{-\frac{1}{2}}$
Prędkość	$[L]^1 [T]^{-1}$	$\frac{k_\mu}{k_D k_\rho}$	$k_D^{\frac{1}{2}} k_g^{\frac{1}{2}}$	$k_K^{\frac{1}{2}} k_\rho^{-\frac{1}{2}}$
Przyspieszenie	$[L]^1 [T]^{-2}$	$\frac{k_\mu^2}{k_\rho^3 k_D^3}$	k_g	$k_K k_D^{-\frac{1}{2}} k_\rho^{-\frac{1}{2}}$
Wydatek objętościowy/ natężenie wpływu	$[L]^3 [T]^{-1}$	$\frac{k_D k_\mu}{k_\rho}$	$k_D^{\frac{5}{2}} k_g^{\frac{1}{2}}$	$k_D^2 k_K k_\rho^{-\frac{1}{2}}$
Dynamiczne:				
Masa	$[M]^1$	$k_D^3 k_\rho$	$k_D^3 k_\rho$	$k_D^3 k_\rho$
Siła	$[M]^1 [L]^1 [T]^{-2}$	$\frac{k_\mu^2}{k_\rho}$	$k_D^3 k_\rho k_g$	$k_D^2 k_K$
Ciśnienie	$[M]^1 [L]^{-1} [T]^{-2}$	$\frac{k_\mu^2}{k_D^2 k_\rho}$	$k_D k_\rho k_g$	k_K
Impuls i pęd	$[M]^1 [L]^1 [T]^{-1}$	$k_D^2 k_\mu$	$k_D^{\frac{7}{2}} k_\rho^{\frac{1}{2}} k_g^{\frac{1}{2}}$	$k_D^3 k_\rho^{\frac{1}{2}} k_K^{\frac{1}{2}}$
Energia i praca	$[M]^1 [L]^2 [T]^{-2}$	$\frac{k_D k_\mu^2}{k_\rho}$	$k_D^4 k_\rho k_g$	$k_D^3 k_K$
Moc	$[M]^1 [L]^2 [T]^{-3}$	$\frac{k_\mu^3}{k_D k_\rho^2}$	$k_D^{\frac{7}{2}} k_\rho^{\frac{3}{2}} k_g^{\frac{3}{2}}$	$k_D^2 k_K k_\rho^{-\frac{1}{2}}$

Uwaga: Zwykle jest takie samo w modelu i prototypie, więc $k_g=1$

Literatura

- [1] Flaga A. *Inżynieria wiatrowa. Podstawy i zastosowania*. Arkady, Warszawa 2008.
- [2] Daugherty R.L., Franzini J.B. *Fluid Mechanics with engineering applications*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1977.
- [3] Gryboś R. *Podstawy mechaniki płynów. Część I i II*. Wydawnictwa Naukowe PWN, Warszawa 1998.
- [4] Flaga A. *Basic principles and theorems of dimensional analysis and the theory of model similarity of physical phenomena*. Technical Transactions, Civil Engineering, 2-B/2015, 241–272.

Ratios of forces and forces moments as dynamic similarity criteria of various phenomena occurring in wind engineering, snow engineering and fluid dynamics

Part I – Unsteady problems of periodic, quasi-periodic and turbulent character

Andrzej Flaga

*Faculty of Civil Engineering, Institute of Structural Mechanics, Cracow University of Technology
e-mail: liwpk@windlab.pl*

Abstract: The work concerns dynamic similarity criteria of various phenomena occurring in wind engineering, snow engineering and fluid dynamics derived from ratios of forces and forces moments affecting these phenomena. Derived and analyzed in part II dynamic similarity criteria, mainly concern the following unsteady problems of periodic, quasi-periodic and turbulent character: 1. Vibrations of a solid in a stationary and moving fluid; 2. Snow particles/flakes/clusters breaking off the outer layer of the snow deposit; 3. Rotating turbines, propellers or screw propellers.

Keywords: dynamic similarity criteria, wind engineering, snow engineering, fluid dynamics, steady problems.