

## **Określanie poziomu tłumienia drgań w mostach i kładkach dla pieszych**

**Jacek Szulej<sup>1</sup>, Paweł Ogrodnik<sup>2</sup>**

<sup>1</sup> *Katedra Mechaniki Budowli, Wydział Budownictwa i Architektury,  
Politechnika Lubelska, e-mail: j.szulej@pollub.pl*

<sup>2</sup> *Katedra Techniki Pożarniczej, Wydział Inżynierii Bezpieczeństwa Pożarowego,  
Szkoła Główna Służby Pożarniczej, e-mail: pogrodnik@sgsp.edu.pl*

**Streszczenie:** Projektując smukłe i wiotkie konstrukcje, takie jak mosty wiszące, podwieszane, łukowe oraz kładki dla pieszych wymagane są dane dotyczące dynamicznego zachowania konstrukcji. Jedną z głównych wielkości, uwzględnianą w obliczeniach to parametr tłumienia drgań konstrukcji, którego odpowiednia wartość ma bezpośredni wpływ na prawidłowe zachowanie obiektu. Jednym ze stosowanych obecnie podejść w przypadku złożonych konstrukcji jest wykorzystanie metod, określających ekwiwalentny współczynnik tłumienia drgań, odnoszący się do danej postaci drgań własnych. Wśród tych metod wyróżnić można metodę kolokacyjną i metodę energetyczną. Metoda kolokacyjna odnosi się do obiektów już istniejących i wymaga przeprowadzenia pomiarów drgań oraz obróbki widmowej przebiegów czasowych drgań. Metoda energetyczna wymaga stworzenia modelu Mes konstrukcji i szacuje energię kinetyczną drgającego układu. Wyżej wymienione metody wykorzystano w obliczeniach poziomu tłumienia drgań dwóch konstrukcji, tj.: mostu łukowego im. Jana Pawła II w Puławach i wybranej kładki zlokalizowanej w Lublinie.

**Słowa kluczowe:** poziom tłumienia, konstrukcje wielomateriałowe, metoda kolokacyjna, metoda energetyczna.

### **1. Wstęp**

Celem artykułu jest przedstawienie dwóch metod służących określaniu współczynników tłumienia drgań konstrukcji wielomateriałowych oraz wyznaczenie wartości współczynników tłumienia na przykładzie mostu łukowego i kładki pieszo-jezdnej.

### **2. Opis metod określających poziom tłumienia drgań**

Metoda kolokacyjna wymaga przeprowadzenia badań, polegających na wzbudzeniu drgań na istniejącej konstrukcji, obróbki widmowej otrzymanych przebiegów czasowych i rozwiązaniu odpowiednich równań nieliniowych. W metodzie energetycznej wykorzystuje się model MES i obliczenia dynamiczne modelu konstrukcji. Obie metody pozwalają określić poziom tłumienia drgań konstrukcji wielomateriałowych w odniesieniu do różnych postaci drgań.

#### **2.1. Metoda oparta na szacowaniu energii kinetycznej**

Korzystając z podstawowych założeń metody energetycznej, wykorzystującej energię potencjalną wg [1, 2, 3], określić można wartości tłumienia drgań, opierając się na energii

kinetycznej układu [4]. Metoda szacująca energię kinetyczną pozwala na dokładniejsze określenie tłumienia, ponieważ uwzględnia również warstwy wypełniające. Warstwy te mają znaczną energię kinetyczną i właściwości tłumiące (np.: warstwy izolacyjne i jezdne w mostach).

Określanie współczynnika tłumienia drgań polega na uwzględnieniu energii kinetycznej  $E_{ij}$  drgającego układu, którą wyznacza się w następujący sposób:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{M}_j \boldsymbol{\varphi}_i \omega_i^2 \quad (1)$$

gdzie:  $\boldsymbol{\varphi}_i$  – unormowane wektory własne  $i$ -tej postaci drgań,  $\mathbf{M}_j$  – macierze mas  $j$ -tego materiału w konstrukcji (lub fragmentu konstrukcji),  $\omega$  – częstości drgań własnych  $i$ -tej postaci drgań.

Postać wzoru na wartość logarytmicznego dekrementu tłumienia drgań jest następująca:

$$\delta_i = \frac{1}{2} \frac{\sum_j E_{ij} \psi_j}{\sum_j E_{ij}} \quad (2)$$

gdzie:  $E_{ij}$  – udział energii kinetycznej  $j$ -tego materiału w konstrukcji przy  $i$ -tej formie drgań,  $\psi_j$  – współczynnik pochłaniania (tłumienia właściwego) danego materiału wg [4, 5, 6, 7, 8, 9].

## 2.2. Metoda kolokacyjna

Metoda kolokacyjna opisana w pracach [4, 9], opiera się na analizie widmowej przebiegów czasowych drgań swobodnych, badanych konstrukcji, polega na doborze funkcji aproksymującej. Zastosowana funkcja pozwala na dokładne obliczenie poziomu tłumienia drgań (współczynnika tłumienia  $\beta$ ).

Kolejność czynności przy określaniu tłumienia drgań, badanej konstrukcji, jest następująca:

- Pomiary drgań swobodnych konstrukcji (stosując: czujniki przemieszczeń, akcelerometry), dzięki którym uzyskuje się przebiegi czasowe  $y(t)$ ;
- Przeprowadzenie analizy spektralnej przebiegów czasowych  $y(t)$  za pomocą *FFT* (szybkiej transformacji Fouriera), na tej podstawie wyznacza się funkcję  $F(t) = FFT\{y(t)\}$  oraz częstości kołowe drgań własnych  $\omega_i$ , odpowiadające lokalnym ekstremom funkcji  $F(t)$ ;
- Przyjęcie założenia, że drgania badanej konstrukcji są sumą tłumionych drgań harmonicznym o różnych częstościach kołowych (tłumienie opisane jest zastępczym modelem wiskotycznym), tak jak w poniższym wzorze:

$$\tilde{y}(t) = \sum_i \{A_i e^{-\beta_i t} \sin(\omega_i^* t) + B_i e^{-\beta_i t} \cos(\omega_i^* t)\}, \quad (\omega_i^*)^2 = (\omega_i)^2 - (\beta_i)^2 \quad (3)$$

gdzie:  $\omega$  –  $i$ -ta częstość kołowa drgań własnych nietłumionych,  $A_i$ ,  $B_i$  – ich amplituda,  $\beta_i$  – parametr tłumienia, odpowiadający  $i$ -tej częstości kołowej;

- Aproksymacja funkcji  $F^2$  funkcją  $Y^2$ , opisana poniższą zależnością:

$$Y(f) = FFT\{\tilde{y}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{y}(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-2\pi i f t} dt \quad (4)$$

- Wyznaczenie  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $\beta_i$  (układ równań nieliniowych), gdzie najważniejszym jest ostatni parametr, opisujący poziom tłumienia drgań.

Postać wzoru na wartość logarytmicznego dekrementu tłumienia drgań odpowiadająca  $i$ -tej postaci drgań własnych jest następująca:

$$\delta_i = \beta_i \cdot T_i \quad (5)$$

gdzie:  $T_i$  –  $i$ -ty okres drgań własnych.

### 3. Weryfikacja metody kolokacyjnej i energetycznej

Omówione wyżej metody wykorzystano w obliczeniach poziomu tłumienia dwóch konstrukcji, tj.: kładki dla pieszych zlokalizowanej w Lublinie i mostu łukowego im. Jana Pawła II w Puławach.

#### 3.1. Kładka nad rzeką Bystrzyca w Lublinie w sąsiedztwie ulicy Janowskiej

##### 3.1.1. Opis pomiarów drgań własnych kładki

Kładka położona jest za istniejącym mostem kolejowym linii Warszawa Dorohusk w odległości około 50 m w górę rzeki, przy ul. Janowskiej. Jest to kładka pieszo – jezdna, o schemacie wolnopodpartym i konstrukcji stalowej z wypełnieniem pomostu w postaci żywicy epoksydowej o grubości 7 mm. Podstawowe wymiary kładki: długość całkowita 31.4 m, rozpiętość teoretyczna przęsła 25 m, szerokość użytkowa 4 m, wysokość dźwigarów stalowych 1.13 m, wysokość bariery stalowej 1.25 m. Głównym elementem kładki jest przęsło stalowe złożone z dwóch dźwigarów stalowych wykonanych z dwuteowych belek spawanych IKS 1100-11. Pomost składa się z części dolnej złożonej z ceowników C200 mocowanych do dźwigarów stalowych w rozstawie, co 1.25 m i części górnej składającej się z żeber podłużnych (ceowniki C50) w rozstawie, co 0,75 m i blach wierzchnich pomostu.

Rysunki 1a i 1b pokazują widoki badanej kładki.



Rys. 1. Kładka w sąsiedztwie ulicy Janowskiej w Lublinie: a) widok z perspektywy pieszego b) widok pomostu od dołu

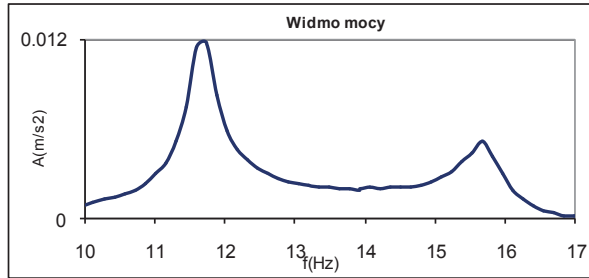
Badania drgań wiaduktu wykonano przy użyciu sprzętu HBM: akcelerometrów B200, analizatora Spider i programu sterującego Catman.

Wymuszenie realizowano przez skoki w sześciu punktach przęsła. W osi podłużnej kładki (1/2, 1/4, 1/8 długości) i w linii poręczy (1/2, 1/4, 1/8 długości)

Czujniki zostały rozmieszczone na pomoście kładki przy poręczach. Pierwszy zamocowano w połowie długości, drugi w 1/4 długości, trzeci w 1/8 długości kładki. Sygnał

próbkowano z częstotliwością 1200Hz. o szerokości pasma 150 Hz oraz przebiegi przemieszczeń drgań, uzyskane po obrobeniu przebiegów przyspieszeń drgań. Na podstawie tych przebiegów czasowych wykonano analizę widmową drgań, z której otrzymano częstotliwości drgań własnych.

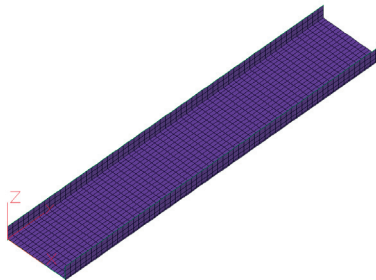
Na rys. 2 zestawiono przykładowy wykres gęstości widmowej mocy przyspieszeń.



Rys. 2. Przykładowe widmo amplitudowe (wymuszenie; punkt 4, czujnik nr 3)

### 3.1.2. Drgania własne konstrukcji

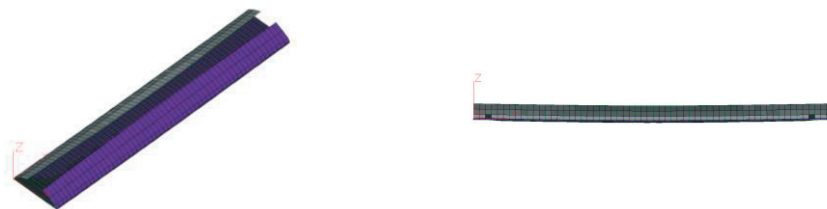
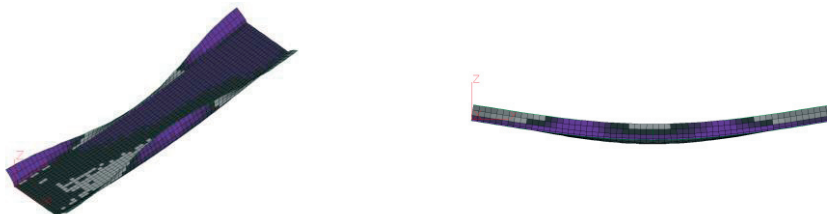
W celu wyznaczenia zestawu postaci oraz częstotliwości drgań własnych posłużono się jednym pakietem MES, jakim jest system ALGOR. Stworzono model MES analizowanej kładki (rys. 3), a następnie wykonano liniową analizę modalną, który posługuje się metodą iteracji podprzestrzeni przy wyznaczaniu początkowych postaci i wartości drgań własnych. W wyniku analizy modalnej otrzymano zestaw dziesięciu pierwszych postaci drgań własnych odkształconych wokół ich położenia równowagi statycznej. Zestawienie częstotliwości oraz wybranych postaci drgań analizowanej konstrukcji przedstawiono w tablicy 1 i rysunkach 4 i 5.



Rys. 3. Model MES analizowanej kładki

Tabela 1. Częstotliwości oraz postaci drgań własnych analizowanej kładki

Nr post. drgań	Częstotliwość $f_i$ [Hz] - Algor	Częstotliwość $f_i$ [Hz] - badania	Opis formy drgań
1	3.995	-	Drgania skrętne antysymetryczne blachownic
2	4.019	3.957	Drgania skrętne symetryczne blachownic
3	4.277	-	Drgania skrętne antysymetryczne blachownic
4	4.328	-	Drgania skrętne antysymetryczne blachownic
5	4.790	5.127	Pierwsza giętą pionową symetryczną

Rys. 4. Druga postać drgań własnych  $f_2= 4.019$  HzRys. 5. Piąta postać drgań własnych  $f_5= 4.790$  Hz

### 3.1.3. Wyniki obliczeń parametrów tłumienia

Stosując metodę kolokacyjną otrzymano zbliżone wartości  $\delta$  stosując wymuszenia drgań w różnych miejscach konstrukcji. Średnie wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia drugiej i piątej postaci drgań przedstawiono w tabeli 2. Uzyskanie wartości tłumienia drgań wszystkich postaci wymaga przeprowadzenia wymuszeń drgań konstrukcji w kierunku poziomym.

W odniesieniu do metody energetycznej współczynniki pochłaniania dla poszczególnych materiałów  $\psi_f$  przyjęto z literatury, tj.: dla stali przyjęto  $\delta_s = 0,01$  a dla żywicy epoksydowej  $\delta_z = 0,15$ . Stosując metodę energetyczną przy określaniu parametrów tłumienia otrzymano dużo niższe wartości  $\delta$ , spowodowane to może być dużymi rozbieżnościami w wartościach składowych logarytmicznego dekrementu tłumienia dla poszczególnych materiałów i konstrukcji występujących w kładce.

Tabela 2. Wartości  $\delta$  pięciu pierwszych postaci drgań

Nr post. drgań	Metoda energetyczna $\delta$	Metoda kolokacyjna $\delta$
1	0.0102	-
2	0.0106	0.455
3	0.0101	-
4	0.0207	-
5	0.0189	0.110

## 3.2. Most im. Jana Pawła II w Puławach

### 3.2.1. Opis pomiarów drgań własnych mostu

Do badań wybrano most łukowy w Puławach (rys. 6a i 6b), składający się z następujących głównych części konstrukcyjnych: dwóch stalowych łuków, pomostu stalowo-żelbetowego, stalowych prętów podwieszających pomost. Pomost zaprojektowano jako wykonany ze stali i żelbetu, składający się z czterech stalowych podłużnych dźwigarów, rozstawionych symetrycznie względem osi jezdni i poprzecznic stalowych. Na konstrukcji

stalowej spoczywa pomost o całkowitej szerokości ok. 22 m. Warstwy części jezdnej to: mieszanka grysowo-mastyksowa SMA jako warstwa ścieralna (4 cm), beton asfaltowy modyfikowany (6 cm), izolacja (papa zgrzewalna 5 mm), płyta żelbetowa (27–36 cm).



Rys. 6. Widok mostu w Puławach: a) widok boczny, b) widok od dołu

Badania drgań mostu wykonano przy użyciu sprzętu HBM: akcelerometrów B200, analizatora Spider i programu sterującego Catman.

Drgania wymuszano przy wykorzystaniu samochodu ciężarowego, przejeżdżającego przez drewniany próg, usytuowany w połowie, jednej czwartej i trzech ósmych rozpiętości przęsła mostu wzdłuż jego osi oraz w połowie rozpiętości i trzech ósmych na skraju pomostu.

Akcelerometry podczas badań zamocowane były w połowie, jednej czwartej i trzech ósmych rozpiętości przęsła mostu wzdłuż jego osi oraz jeden w połowie rozpiętości na skraju pomostu.

Wynikami pomiarów są przyspieszenia drgań w czasie, próbkowane z częstotliwością 1200 Hz o szerokości pasma 150 Hz oraz przebiegi przemieszczeń drgań, uzyskane po obrobieniu przebiegów przyspieszeń drgań. Na podstawie tych przebiegów czasowych wykonano analizę widmową drgań, z której otrzymano częstotliwości drgań własnych. Wykorzystywano przebiegi przyspieszeń i przemieszczeń w celu uzyskania jak najdokładniejszych wykresów gęstości widmowej mocy.

Na rys. 7 zestawiono przykładowy wykres gęstości widmowej mocy przyspieszeń.



Rys. 7. Przykładowa FFT bazująca na przebiegu przyspieszeń drgań

### 3.2.2. Drgania własne konstrukcji

Częstotliwości drgań własnych i związane z nimi postaci obliczono dla modelu pokazanego na rys. 8, uwzględniającego trzy przęsła mostu poza częścią łukową w kierunku Radomia, które mają rozpiętości odpowiednio, licząc od podpory łuku, 80 m, 64 m i 64 m, oraz dwa przęsła w kierunku Lublina o rozpiętościach, licząc od podpory łuku, 80 m i 44 m. W obliczeniach wykorzystano program Algor oparty na metodzie elementów skończonych.

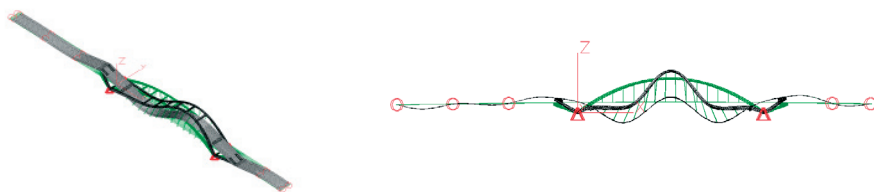
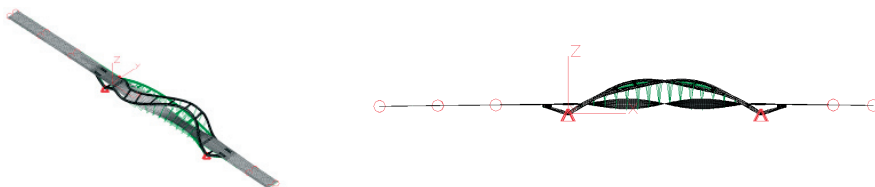
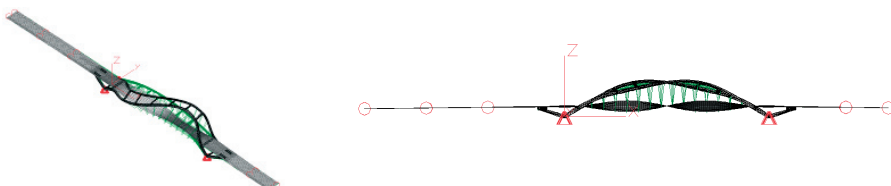
W tabeli nr 3 zestawiono częstotliwości drgań własnych (z modelu MES i z badań opisanych wcześniej), a na rysunkach 9, 10, 11 pokazano trzy postaci drgań uzyskane z programu Algor.



Rys. 8. Model MES mostu w Puławach

Tabela 3. Częstotliwości i postacie drgań własnych analizowanego mostu

Nr post. drgań	Częstotliwość $f_i$ [Hz] - Algor	Częstotliwość $f_i$ [Hz] - badania	Opis formy drgań
1	0.676	0,805	Giętne pionowe
2	0.757	-	Giętne poziome
3	1.168	-	Giętne poziome (drżania pomostu i łuku)
4	1.274	1,245	Skrętne pomostu, giętne poziome łuku
5	1.338	-	Giętne pionowe
6	1.377	1.795	Giętne pionowe

Rys. 9. Pierwsza postać drgań  $f_1=0.676$  HzRys. 10. Czwarta postać drgań  $f_4=1.274$  HzRys. 11. Szósta postać drgań  $f_6=1.377$  Hz



### 3.2.3. Współczynniki tłumienia drgań

Obliczając parametry tłumienia drgań metodą kolokacyjną brano pod uwagę maksymalnie trzy reprezentatywne, czyli bliskie „nieodseparowane” częstotliwości własne. W obliczeniach wykorzystano program Catman 4.0 i widmo mocy „Auto-power spectrum”. Obliczono  $\delta$  dla kilku reprezentatywnych postaci drgań własnych mostu.

Określając wartości współczynnika tłumienia drgań metodą energetyczną, wykorzystano macierze diagonalne mas i postaci drgań modelu. Współczynniki pochłaniania dla poszczególnych materiałów  $\psi_f$  przyjęto na podstawie logarytmicznych dekrementów tłumienia tych materiałów z literatury, tj.: dla stali przyjęto  $\delta_s = 0,01$ , dla żelbetu  $\delta_z = 0,2$  a dla betonu asfaltowego  $\delta_b = 0,15$ . Otrzymano wartości logarytmicznego dekrementu tłumienia dla sześciu pierwszych postaci drgań własnych.

Uzyskane wyniki  $\delta$  w odniesieniu do dwóch metod, przedstawiono w tabeli nr 4.

Tabela 4. Wartości  $\delta$  pięciu pierwszych postaci drgań

Nr post. drgań	Metoda Energetyczna $\delta$	Metoda Kolokacyjna $\delta$
1	0.041	0.115
2	0.072	-
3	0.046	-
4	0.075	0.066
5	0.079	-
6	0.094	0.082

## 4. Wnioski

Wykorzystując metodę kolokacyjną otrzymuje się dokładne parametry tłumienia drgań dla różnych częstości drgań mostu. Częstości drgań uzyskuje się dzięki badaniom przeprowadzonym na obiekcie. Do określenia wszystkich częstości własnych wymagane są wymuszenia drgań w różnych kierunkach i rozmieszczenie czujników w różnych punktach konstrukcji. Wyniki charakteryzują się dużą zgodnością, praktycznie bez większych rozrzutów wynikających z różnych miejsc gdzie dokonywano wmuszeń i miejsc pomiarów drgań. W metodzie kolokacyjnej uwzględnić można przebiegi przyspieszeń i przemieszczeń, dzięki którym można otrzymać większy zakres częstotliwości własnych (większą liczbę częstotliwości reprezentatywnych).

Stosując metodę energetyczną (wykorzystującą całkowitą energię kinetyczną drgającego układu), otrzymano wartości  $\delta$  częściowo porównywalne z wartościami uzyskanymi stosując metodę kolokacyjną. Wyniki charakteryzują się zgodnością w przypadku rozpatrywanego mostu łukowego zaś wykazują duże rozbieżności w przypadku kładki pieszojezdnej. Otrzymane rozbieżności mogą mieć związek z różnym wpływem tłumienia konstrukcyjnego, które oprócz tłumienia materiałowego ma wpływ na ostateczny poziom tłumienia drgań różnych rodzajów konstrukcji. Nie bez znaczenia jest również stan techniczny analizowanej kładki, która jest już użytkowana wiele lat.

Podsumowując metoda energetyczna może stanowić prosty sposób na wyznaczenie parametru tłumienia drgań już na etapie projektowania konstrukcji. Wymagane są jednak jeszcze badania na wykonanych konstrukcjach, które pozwolą na dokładne określenie składowych współczynników tłumienia drgań odpowiednio różnych dla różnych typów mostów i kładek (np.: most, kładka: wisząca, podwieszona i łukowa).



## Literatura

- 1 Yamaguchi H, Ito M (1995) „Mode-dependency of structural damping in cable-stayed bridges”, *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* 72, 1997, 289-300,
- 2 Yamaguchi H., Adhikari R., „Energy-based evaluation of modal damping in structural cables with and without damping treatment”, *J. of Sound and Vibration* 181, 1995, 71-83,
- 3 Jayawardena L., „Analytical estimation of vibration damping in cable system” *Asian Institute of Technology, Bangkok, Thailand, 1991,*
- 4 Szulej J.: „Wyznaczenie ekwiwalentnego wiskotycznego tłumienia drgań w konstrukcjach wielomateriałowych”, rozprawa doktorska, Lublin, 2009,
- 5 Dyląg Z. i inni „Wytrzymałość materiałów”, tom 2, WNT, Warszawa, 1997,
- 6 Rakowski G. i in. „Mechanika budowli-ujęcie komputerowe”, tom 2, Arkady, Warszawa, 1992,
- 7 Bachmann H. „Vibration problems in structures”, Wien, Bulletin D'Information, No 209, 1991,
- 8 Flaga A. i in. „Analiza dynamicznego oddziaływania wiatru na wybrane konstrukcje wiszące w warunkach sprzężeń dynamicznych”, Pr. bad. nr 7 T07E01212, Lublin, 1999,
- 9 Flaga A., Michałowski T. „Charakterystyki tłumienia drgań lekkich kładek wiszących i podwieszonych”, *Inżynieria i Budownictwo* nr 9, 2000, 495-497.

## Determining the level of damping vibration in bridges and footbridges

Jacek Szulej<sup>1</sup>, Paweł Ogrodnik<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Department of Structural Mechanics, Faculty of Civil Engineering and Architecture,  
Lublin University of Technology, e-mail: j.szulej@pollub.pl*

<sup>2</sup> *Department of Fire Technology, Faculty of Civil Safety Engineering,  
The Main School of Fire Service, e-mail: pogrodnik@sgsp.edu.pl*

**Abstract:** While designing slim and slender structures such as cable-stayed, suspended and arch bridges and footbridges, data on the dynamic behavior of structure are required. One of the main quantities, included in the calculations, is the damping parameter of vibration of the structure whose corresponding value has a direct impact on the proper behavior of the facility. One of currently applied approaches in the case of complex constructions, is the use of methods defining the equivalent damping coefficient which refers to the given form of natural vibrations. Among these methods, the collocation method and energy method can be distinguished. The collocation method refers to the existing facilities and requires performing measurements of vibration and spectral processing of time course of vibrations. The energy method requires the creation of FEM model of construction and it estimates the kinetic energy of the vibrating system. The above-mentioned methods are used in the calculations of the damping level of vibration of two structures, i.e.: arch John Paul II Bridge in Pulawy and a footbridge located in Lublin.

**Keywords:** damping level, composite structures, the collocation method, the energy method.

