

DOI: 10.5604/20830157.1166546

# ZASTOSOWANIE METODY ELEMENTÓW BRZEGOWYCH DO ROZWIĄZYWANIA PROBLEMÓW PROSTYCH W OBSZARACH STREFOWO NIEJEDNORODNYCH WZGLĘDEM PRZEWODNICTWA WŁAŚCIWEGO

**Paweł Tchórzewski**

Net-Art, Dział R&D, ul. Związkowa 26, 20-148 Lublin

**Streszczenie.** Przedstawiam rozwiązanie problemu prostego dla pola elektrycznego otrzymane z wykorzystaniem metody elementów brzegowych. Funkcja opisująca rozkład przewodnictwa właściwego na rozważanym obszarze przyjmuje dwie różne niezerowe wartości. Proponowane podejście może zostać wykorzystane przy wyznaczaniu rozwiązania zagadnienia odwrotnego w systemie przeznaczonym do monitorowania stanu wałów przeciwpowodziowych. Działanie tego systemu opiera się na impedancyjnej tomografii komputerowej.

**Słowa kluczowe:** symulacja numeryczna, metoda elementów brzegowych, zagadnienie proste

## SOLUTIONS OF FORWARD PROBLEMS OBTAINED VIA BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR NONHOMOGENEOUS DOMAINS IN REGARD TO ELECTRICAL CONDUCTIVITY

**Abstract.** I present solution of the forward problem for electric field obtained through the boundary element method. The function which describes electrical conductivity distribution on the domain possesses two different nonzero values. Proposed approach can be utilised in order to obtain solution of the inverse problem in the flood embankment control system. Such system relies on the electrical impedance tomography.

**Keywords:** numerical simulation, boundary element method, forward problem

### Wstęp

Numeryczne metody rozwiązywania równań różniczkowych i ich układów stanowią bardzo istotny obszar współczesnej nauki. Pozwalają one na uzyskanie rozwiązania mającego charakter przybliżony w przypadku, gdy ścisłe rozwiązanie nie jest możliwe do otrzymania za pośrednictwem metod analitycznych. Brak możliwości otrzymania ścisłego rozwiązania jest bardzo częstym przypadkiem dla modeli opisujących zjawiska fizyczne w sposób realistyczny. Takie modele są niejednokrotnie dość złożone pod względem matematycznym i są przeważnie reprezentowane poprzez układy równań różniczkowych. Dokładne rozwiązanie otrzymujemy zwykle jedynie dla problemów akademickich, gdzie mamy do czynienia z odpowiednio uproszczonymi podejściami do opisu złożonych zjawisk.

Otrzymanie numerycznego rozwiązania równania różniczkowego albo układu takich równań jest niejednokrotnie zadaniem wymagającym wiele wysiłku już na etapie projektowania odpowiedniego algorytmu. Wybór konkretnej metody rozwiązania zależy od typu równania, a nawet od postaci warunków brzegowych. Czasami pomocna staje się możliwość wykorzystania odpowiedniego pakietu numerycznego, który z reguły dedykowany jest dla wąskiej grupy problemów z określonej dziedziny badawczej. W przypadku pewnych zadań szczególnym wyzwaniem jest opracowanie algorytmów charakteryzujących się stabilnością numeryczną. Brak stabilności numerycznej powoduje znaczące zniekształcenie końcowego wyniku obliczeń. Zdarzają się też zagadnienia źle uwarunkowane. Wówczas małe zmiany w danych początkowych w zasadniczy sposób zmieniają końcowe rozwiązanie. Z taką sytuacją mamy do czynienia między innymi przy zagadnieniu (problemie) odwrotnym w impedancyjnej tomografii komputerowej (ITK).

Celem pracy badawczej jest rozwiązanie zagadnienia prostego dla pola elektrycznego w ITK. Można przyjąć, że tak postawione zadanie sprowadza się do problemu brzegowego dla równania różniczkowego cząstkowego, które opisuje stacjonarny przepływ prądu elektrycznego w ośrodku strefowo niejednorodnym względem przewodnictwa właściwego. Przyjęto, że ośrodek ten posiada dwa wymiary przestrzenne. Z punktu widzenia specyfiki problemu odwrotnego kluczowe znaczenie posiadają wielkości fizyczne określone na brzegu badanego obszaru, to jest potencjał pola elektrycznego oraz jego pochodna w kierunku normalnym do wspomnianego brzegu. Z tego względu zasadne wydaje się skorzystanie z metody elementów brzegowych.

Opisany sposób podejścia do rozwiązywania problemu prostego jest użyteczny ze względu na swoje potencjalne zastosowania praktyczne. Przykładowo, wymienić można tutaj system przeznaczony do kontroli stanu wałów przeciwpowodziowych. Koncepcja działania systemu opiera się na wykorzystaniu ITK [7]. W procesie automatycznego przetwarzania zebranych danych pomiarowych ważną rolę odgrywa wybór odpowiedniego modelu geometrycznego, który będzie reprezentował fragment wału przeciwpowodziowego. Istotny jest także właściwy wybór warunków brzegowych. W niniejszej pracy została przedstawiona propozycja rozwiązania wymienionych powyżej problemów.

Kolejna część artykułu zawiera zwięzłe omówienie zastosowanego formalizmu. W ostatniej części zaprezentowane zostały wybrane rozwiązania zagadnienia prostego.

### 1. Metoda elementów brzegowych

Pomysł na rozwiązanie opisanego we wstępie problemu prostego w ITK opiera się na odpowiednim wykorzystaniu metody elementów brzegowych (MEB). Technika ta pozwala na otrzymanie przybliżonego rozwiązania w przypadku takich równań różniczkowych cząstkowych, które są możliwe do przedstawienia w postaci całkowitej. Aby można było używać MEB dla wybranego równania w sposób efektywny, konieczne staje się ścisłe wyznaczenie funkcji Greena. Tak więc, w przypadku MEB obliczenia do określonego etapu wykonywane są w sposób analityczny. Ponadto należy zauważyć, że nie przeprowadzamy dyskretyzacji całego obszaru, a jedynie brzegu. Prawidłowość ta ułatwia sporządzenie modelu badanego obiektu. Pewne trudności mogą pojawić się podczas prób obliczenia charakterystycznych dla MEB całek z funkcji osobliwych. Jednak w rozważanym przypadku sytuacja taka nie będzie miała miejsca, ze względu na wykorzystanie tak zwanych elementów stałych.

Punktem wyjścia do analizy ilościowej jest uogólnione prawo Ampère'a:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (1)$$

Wektor  $\vec{H}$  oznacza natężenie pola magnetycznego,  $\vec{D}$  jest wektorem indukcji elektrycznej, natomiast  $\vec{j}$  oznacza gęstość prądu. Ponieważ rozważamy zjawisko kwazistacjonarne (wolnozmiennie), więc gęstość prądu przesunięcia z dobrym przybliżeniem wynosi zero.

Dlatego po obliczeniu dywergencji lewej i prawej strony równania (1) otrzymujemy:

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0. \quad (2)$$

W ośrodku izotropowym oraz strefowo niejednorodnym względem przewodnictwa właściwego mamy:

$$\vec{j} = -\sigma \nabla u, \quad (3)$$

gdzie konduktywność  $\sigma$  jest wyrażona poprzez funkcję skalarną. Potencjał pola elektrycznego został oznaczony symbolem  $u$ . Problem prosty w ITK opisany jest równaniem różniczkowym cząstkowym:

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla u) = 0. \quad (4)$$

Na równanie (4) nakładane są odpowiednie warunki brzegowe.

### 1.1. Ośrodki jednorodne

W ośrodku izotropowym oraz jednorodnym względem przewodnictwa właściwego ( $\sigma$  jest stałe) równanie (4) sprowadza się do równania Laplace'a:

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = 0, \quad (5)$$

gdzie  $(x, y) \in \Omega$ . W prosty sposób można wykazać, że postać całkowa równania różniczkowego (5) jest następująca:

$$\int_{\Omega} u \Delta g \, dx dy + \int_{\Gamma} q g \, d\gamma - \int_{\Gamma} u h \, d\gamma = 0. \quad (6)$$

Krzywa  $\Gamma$  stanowi brzeg obszaru  $\Omega$ . Symbol  $d\gamma$  oznacza infitezymalny element długości krzywej. Pochodna potencjału elektrycznego w kierunku prostopadłym do krzywej  $\Gamma$  została oznaczona poprzez  $q$ . W MEB za  $g$  obieramy funkcję Greena, która spełnia równanie różniczkowe [4]:

$$\Delta g + \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) = 0. \quad (7)$$

$\delta(\vec{r})$  oznacza tutaj deltę Diraca. Na funkcję  $g$  nie nakładamy warunków brzegowych. Dla dwuwymiarowej przestrzeni mamy:

$$g(\vec{r}, \vec{r}_i) = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{A}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \right), \quad (8)$$

gdzie  $A$  jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Funkcja  $h$  jest określona na krzywej  $\Gamma$  i oznacza pochodną funkcji Greena w kierunku normalnym do tej krzywej:

$$h(\vec{r}, \vec{r}_i) = \vec{n}(\vec{r}) \cdot \nabla_{\vec{r}} g(\vec{r}, \vec{r}_i) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\vec{n}(\vec{r}) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2}. \quad (9)$$

Wspomniany kierunek normalny jest zdefiniowany poprzez unormowany wektor  $\vec{n}(\vec{r})$ . Wektor ten jest skierowany na zewnątrz obszaru  $\Omega$ . Po wykorzystaniu właściwości funkcji Greena i delty Diraca równanie całkowe (6) przyjmuje postać:

$$c(\vec{r}_i) u(\vec{r}_i) + \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} u(\vec{r}) h(\vec{r}, \vec{r}_i) d\gamma_j = \sum_{j=1}^N \int_{\Gamma_j} q(\vec{r}) g(\vec{r}, \vec{r}_i) d\gamma_j. \quad (10)$$

Tak jak to już zostało wspomniane, krzywą  $\Gamma$  aproksymujemy korzystając z elementów stałych. Oznacza to, że w ramach przyjętego przybliżenia wielkości  $u$  oraz  $q$  są stałe wzdłuż dowolnego elementu brzegowego. Ponadto każdy element brzegowy jest odcinkiem prostej. Równanie wektorowe  $j$ -tego elementu brzegowego ( $\Gamma_j$ ) posiada następującą postać:

$$\vec{r}_j(\xi) = \vec{r}_{(m)j} + \frac{1}{2} (\vec{r}_{(l)j} - \vec{r}_{(f)j}) \xi, \quad (11)$$

gdzie  $\xi \in \langle -1, +1 \rangle$ . Wektory wodzące  $\vec{r}_{(f)j}$ ,  $\vec{r}_{(l)j}$  oraz  $\vec{r}_{(m)j}$  reprezentują odpowiednio: pierwszy wierzchołek, ostatni wierzchołek oraz węzeł elementu brzegowego (rys. 1). Ponieważ węzeł może znajdować się tylko w środku danego elementu brzegowego, dlatego funkcja  $c$  obecna w równaniu (10) przyjmuje tutaj tylko trzy wartości. Jeżeli dany punkt znajduje się na krzywej  $\Gamma$ , to wartość funkcji  $c$  wynosi 0,5. Gdy dany punkt leży wewnątrz obszaru  $\Omega$ , to wartość funkcji  $c$  wynosi 1, natomiast w pozostałych przypadkach funkcja  $c$  przyjmuje wartość równą 0.

Należy zauważyć, że w formule (10) krzywa  $\Gamma$  została podzielona na  $N$  elementów. Infitezymalny element długości dany jest ogólnym wzorem:

$$d\gamma_j = \sqrt{\frac{d\vec{r}_j(\xi)}{d\xi} \cdot \frac{d\vec{r}_j(\xi)}{d\xi}} d\xi. \quad (12)$$

Korzystając z równania (11) w naszym przypadku dostajemy:

$$d\gamma_j = \frac{1}{2} L_j d\xi, \quad (13)$$

gdzie  $L_j$  oznacza długość  $j$ -tego elementu brzegowego:

$$L_j = |\vec{r}_{(l)j} - \vec{r}_{(f)j}|. \quad (14)$$

Aby podczas obliczeń numerycznych zaistniała możliwość wykorzystania wzoru (10) należy wprowadzić jeszcze pewne modyfikacje, zgodnie z założeniami właściwymi dla stałych elementów brzegowych. Niech punkt określony wektorem wodzącym  $\vec{r}_i$  będzie położony na krzywej  $\Gamma$ . Po przeprowadzeniu odpowiednich przybliżeń otrzymujemy:

$$\frac{1}{2} u(\vec{r}_i) + \sum_{j=1}^N u(\vec{r}_j) \int_{\Gamma_j} h(\vec{r}, \vec{r}_i) d\gamma_j = \sum_{j=1}^N q(\vec{r}_j) \int_{\Gamma_j} g(\vec{r}, \vec{r}_i) d\gamma_j. \quad (15)$$

W równaniu (15) za  $\vec{r}_i$  możemy przyjąć wektor wodzący dowolnego węzła. Wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$G_{ij} = \int_{\Gamma_j} g(\vec{r}, \vec{r}_i) d\gamma_j, \quad (16)$$

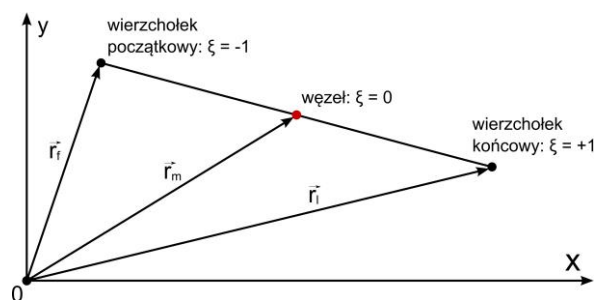
$$H_{ij} = \frac{1}{2} \delta_{ij} + \int_{\Gamma_j} h(\vec{r}, \vec{r}_i) d\gamma_j.$$

Symbol  $\delta_{ij}$  oznacza deltę Kroneckera. Diagonalne elementy macierzy  $H$  oraz  $G$  są wyrażone poprzez ściśle wzory:

$$G_{ii} = \frac{L_i}{2\pi} \left[ \ln \left( \frac{2A}{L_i} \right) + 1 \right], \quad (17)$$

$$H_{ii} = \frac{1}{2}.$$

W przypadku elementów brzegowych wyższych rzędów wyznaczanie elementów diagonalnych wymusza konieczność numerycznego obliczenia całek z funkcji osobliwych [8].



Rys. 1. Struktura geometryczna stałego elementu brzegowego

Korzystając z wprowadzonych powyżej oznaczeń równanie (15) możemy zapisać jako:

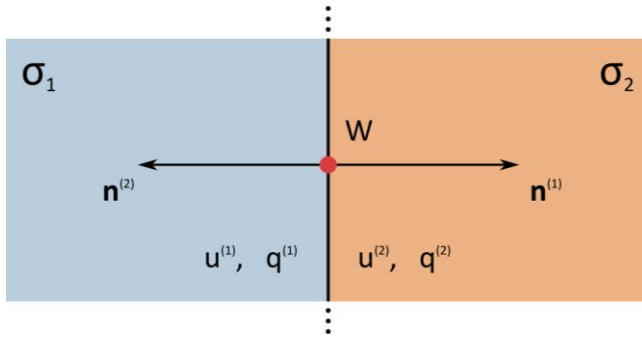
$$\sum_{j=1}^N H_{ij} u(\vec{r}_j) = \sum_{j=1}^N G_{ij} q(\vec{r}_j). \quad (18)$$

W ten sposób otrzymujemy układ składający się z  $N$  liniowych równań algebraicznych na nieznanne (nie określone przez warunki brzegowe) wartości potencjału  $u$  oraz jego pochodnej  $q$  na węzłach elementów brzegowych. Układ ten musi zostać przekształcony w sposób tożsamościowy do postaci macierzowej  $Ax = b$ , gdzie  $x$  jest niewiadomą, natomiast  $A$  oraz  $b$  są znane. Dopiero po otrzymaniu rozwiązania liniowego układu równań możemy przystąpić do obliczenia potencjału oraz jego gradientu w punktach położonych wewnątrz rozpatrywanego obszaru:

$$u(\vec{r}') = \sum_{j=1}^N q(\vec{r}_j) \int_{\Gamma_j} g(\vec{r}, \vec{r}') d\gamma_j - \sum_{j=1}^N u(\vec{r}_j) \int_{\Gamma_j} h(\vec{r}, \vec{r}') d\gamma_j. \quad (19)$$

## 1.2. Ośrodki strefowo niejednorodne

W ośrodku izotropowym oraz strefowo niejednorodnym względem przewodnictwa właściwego potencjał pola elektrycznego jest opisany równaniem (4). Przyjmijmy teraz, że domenę  $\Omega$  można podzielić na dwa podobszary, na których konduktywność  $\sigma$  jest stała. Wówczas na każdym z tych podobszarów potencjał spełnia równanie Laplace'a. Zatem dla każdego z nich można zastosować opisany w poprzednim podrozdziale pracy formalizm obecny w MEB.



Rys. 2. Granica między ośrodkami o różnych przewodnictwach właściwych. Punkt  $W$  oznacza węzeł elementu brzegowego. Wektor normalny jest skierowany na zewnątrz odpowiadającego mu ośrodka

Osobnej analizy wymaga natomiast związek między wielkościami fizycznymi na granicy ośrodków o różnych przewodnictwach właściwych. Należy zauważyć, że na każdym z węzłów leżących na wspomnianej granicy nie są znane wartości liczbowe dla  $u$  oraz dla  $q$ . Możliwa jest jednak eliminacja nadmiernej liczby niewiadomych. Niech  $u^{(j)}$  oraz  $q^{(j)}$  oznaczają wielkości fizyczne w  $j$ -tym ośrodku przypisane do jednego węzła wybranego elementu brzegowego położonego na granicy (rys. 2). Ponieważ potencjał pola elektrycznego oraz wektor gęstości prądu są reprezentowane poprzez funkcje ciągłe, dlatego zachodzą następujące relacje:

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u^{(2)}, \\ \sigma_1 q^{(1)} + \sigma_2 q^{(2)} &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

gdzie  $\sigma_j$  jest przewodnictwem właściwym  $j$ -tego podobszaru.

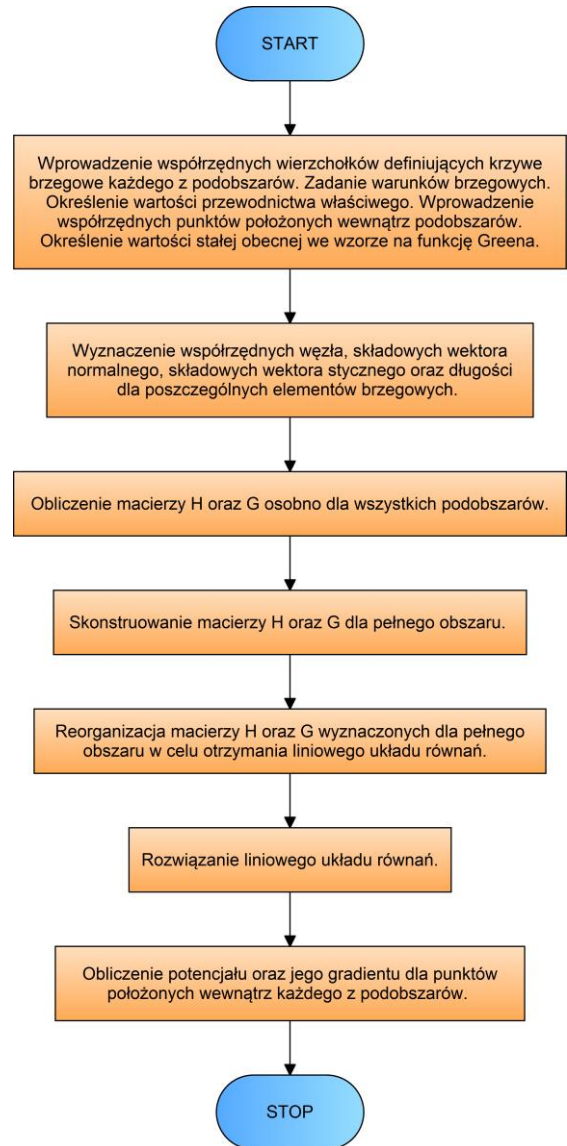
## 2. Obliczenia numeryczne

Wszystkie wielkości fizyczne obecne na poszczególnych wykresach znajdujących się w tym rozdziale pracy wyrażone są w jednostkach układu SI. Ponadto zakładamy, że dodatnia stała obecna we wzorze (8) przyjmuje wartość:  $A = 1$  m.

Aby przeprowadzić obliczenia numeryczne w oparciu o założenia sformułowane w poprzednim rozdziale pracy został napisany odpowiedni program komputerowy. Implementacja MEB w wariantcie dla ośrodka strefowo niejednorodnego została wykonana w środowisku Matlab R2012a. Wybór ten podyktowany był względami praktycznymi. W środowisku Matlab wspomnianą implementację MEB można wykonać w stosunkowo krótkim czasie.

Utworzony program pozwala na wykonanie obliczeń dla ośrodków strefowo niejednorodnych z dwoma niezerowymi i różnymi od siebie współczynnikami konduktywności. Dopuszczalny jest także przypadek, gdzie jeden podobszar jest zawarty wewnątrz drugiego. Nie zostały uwzględnione tak zwane elementy nieskończone. Z tego względu każda krzywa opisująca dowolny podobszar musi być krzywą zamkniętą. Omawiany program działa w sposób sekwencyjny. Porządek kluczowych etapów obliczeń został przedstawiony na rys. 3.

Elementy macierzowe (16) zawierające całki krzywoliniowe niezorientowane z funkcji Greena oraz z jej pochodnej obliczono za pomocą kwadratury Gaussa-Legendre'a. Wykorzystano pięć par składających się z węzła interpolacji oraz odpowiadającej mu wagi. Dla przypadku  $i = j$  (elementy diagonalne) wyprowadzono wzory analityczne (17).



Rys. 3. Schemat blokowy wykonanej implementacji MEB

### 2.1. Rozwiązanie zagadnienia testowego

W celu sprawdzenia poprawności działania rozważanego programu za jego pomocą został rozwiązany pewien problem testowy. Przyjęto, że współczynniki przewodnictwa właściwego przyjmują wartości:  $\sigma_1 = 1 \text{ Sm}^{-1}$  oraz  $\sigma_2 = 4 \text{ Sm}^{-1}$ . Dla prostokątnej domeny (rys. 4) warunki brzegowe zostały zdefiniowane w następujący sposób:

$$u(\vec{r}) = \begin{cases} 6V & \text{dla } \{(x, y): x=0, 0 \leq y \leq m\} \\ 1V & \text{dla } \{(x, y): x=2m, 0 \leq y \leq m\} \end{cases}, \quad (21)$$

$$q(\vec{r}) = 0 \text{ dla } \{(x, y): 0 \leq x \leq 2m, y=0 \vee y=m\}.$$

Po prostych obliczeniach otrzymujemy ścisły rezultat:

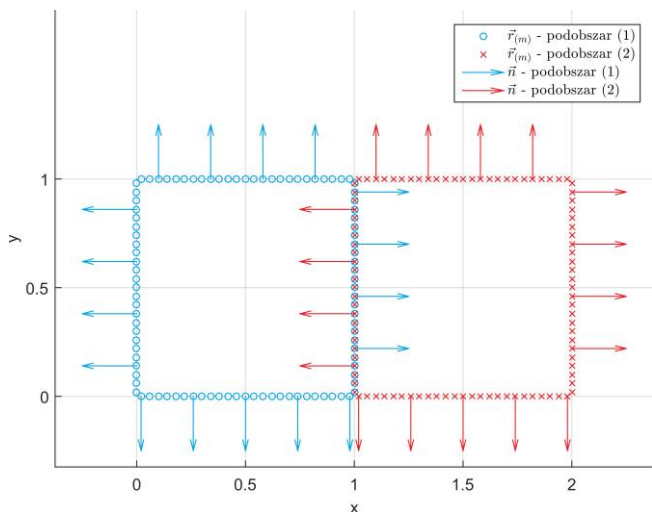
$$u_a(\vec{r}) = \begin{cases} \left(6 - 4 \frac{x}{m}\right)V & \text{dla } \{(x, y): 0 \leq x \leq m, 0 \leq y \leq m\} \\ \left(3 - \frac{x}{m}\right)V & \text{dla } \{(x, y): m \leq x \leq 2m, 0 \leq y \leq m\} \end{cases}. \quad (22)$$

Wzór (22) wykorzystano podczas wyznaczania błędu procentowego dla rozwiązania otrzymanego za pomocą MEB. Błąd ten został obliczony zgodnie z formułą:

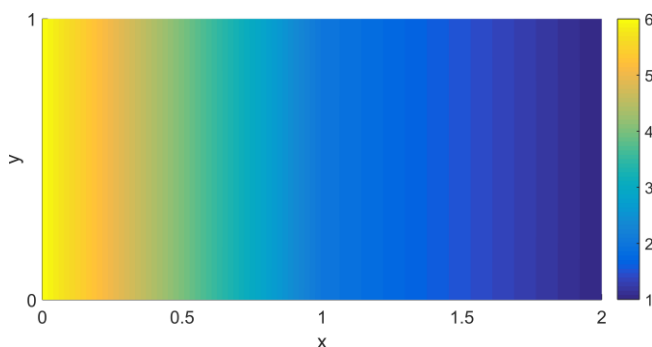
$$\Delta u_{\%} = \left| \frac{u_s - u_a}{u_a} \right| \cdot 100\%, \quad (23)$$

gdzie  $u_s$  reprezentuje wynik symulacji komputerowej, natomiast  $u_a$  oznacza wartość ścisłą.

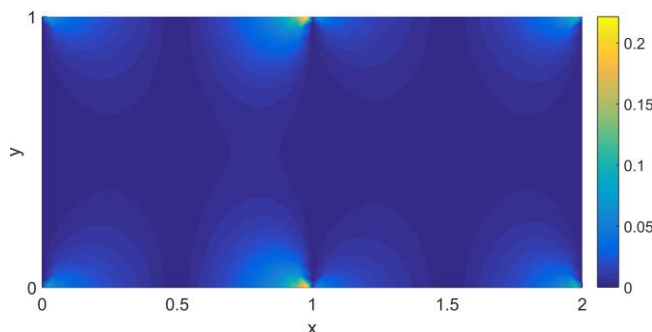
Dyskretyzacja obszaru  $\Omega$  została pokazana na rys. 4. Na brzegu każdego z podobszarów zaznaczono wszystkie węzły elementów brzegowych, a także wektory normalne (w wybranych punktach). Dany wektor normalny jest zawsze skierowany na zewnątrz do koryta rzeki [7]. Do takiego przypadku odnosi się dwuwymiarowy model uszkodzonego wału przeciwpowodziowego zaprezentowany na rys. 7. Zaznaczono tutaj przekrój poprzeczny wału. Ponadto na rys. 8 mamy pokazaną dyskretyzację badanego obszaru. Na brzegu każdego z podobszarów domeny  $\Omega$  zaznaczono węzły wszystkich elementów brzegowych oraz wektory normalne (w wybranych punktach). Podobszar (1) reprezentuje wspomniane uszkodzenie. Wybór kształtu domeny nie jest jednak sprawą jednoznaczną. W ogólności dopuszczalna jest także taka możliwość, że brzeg modelowanego obszaru będzie opisany krzywą otwartą. Wymusza to jednak zastosowanie nieskończonych elementów brzegowych.



Rys. 4. Model testowy utworzony w celu weryfikacji poprawności działania programu



Rys. 5. Przestrzenny rozkład potencjału pola elektrycznego dla modelu testowego otrzymany za pomocą MEB



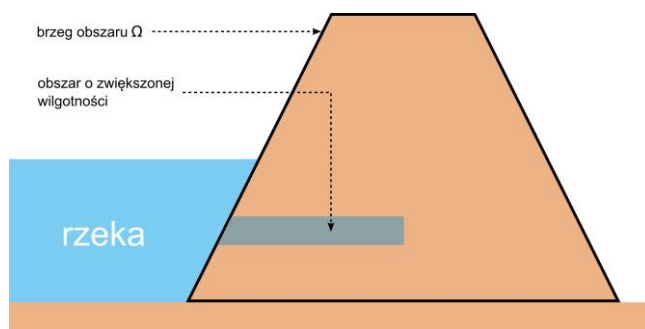
Rys. 6. Przestrzenny rozkład błędu procentowego otrzymany dla numerycznego rozwiązania zagadnienia testowego

## 2.2. Rozwiązanie problemu prostego

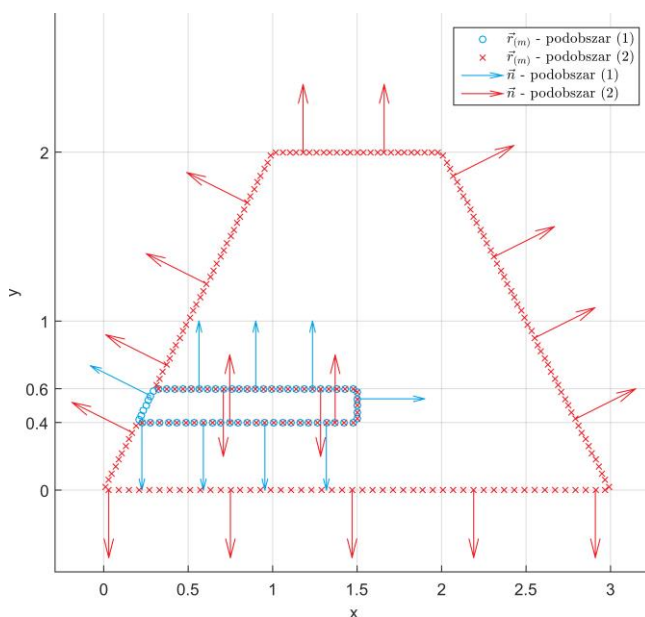
Podczas przeprowadzania badań nad zagadnieniem prostym dla pola elektrycznego w pierwszej kolejności należy wprowadzić odpowiedni model geometryczny. Jest on zależny przede wszystkim od sposobu rozmieszczenia elektrod wchodzących w skład systemu opartego na EIT. Wyróżniamy elektrody prądowe (pola-

ryzują badany obszar) oraz elektrody napięciowe (zapewniają możliwość pomiarów napięcia między określonymi punktami). Elektrody mogą być położone w jednej płaszczyźnie prostopadłej do takiego przypadku odnosi się dwuwymiarowy model uszkodzonego wału przeciwpowodziowego zaprezentowany na rys. 7. Zaznaczono tutaj przekrój poprzeczny wału. Ponadto na rys. 8 mamy pokazaną dyskretyzację badanego obszaru. Na brzegu każdego z podobszarów domeny  $\Omega$  zaznaczono węzły wszystkich elementów brzegowych oraz wektory normalne (w wybranych punktach). Podobszar (1) reprezentuje wspomniane uszkodzenie. Wybór kształtu domeny nie jest jednak sprawą jednoznaczną. W ogólności dopuszczalna jest także taka możliwość, że brzeg modelowanego obszaru będzie opisany krzywą otwartą. Wymusza to jednak zastosowanie nieskończonych elementów brzegowych.

Kolejną kwestią wymagającą rozstrzygnięcia jest wybór wartości przewodnictwa właściwego dla każdego z podobszarów. Konduktywność gleby zależy między innymi od jej rodzaju oraz struktury [6]. Ponadto czynnikiem mającym istotny wpływ na przewodnictwo właściwe gleby jest także jej wilgotność. Wyniki badań zamieszczone w publikacji [6] pokazują, że przewodnictwo właściwe gleby jest rosnącą funkcją jej wilgotności objętościowej. W przyjętym modelu wału przeciwpowodziowego podobszar (1) charakteryzuje się znacznie większą wilgotnością w porównaniu do podobszaru (2). Na potrzeby niniejszego artykułu można przyjąć, że uśrednione konduktywności wynoszą [6]:  $\sigma_1 = 20 \text{ mS m}^{-1}$  oraz  $\sigma_2 = 5 \text{ mS m}^{-1}$ .



Rys. 7. Przekrój poprzeczny koryta rzeki oraz wału przeciwpowodziowego

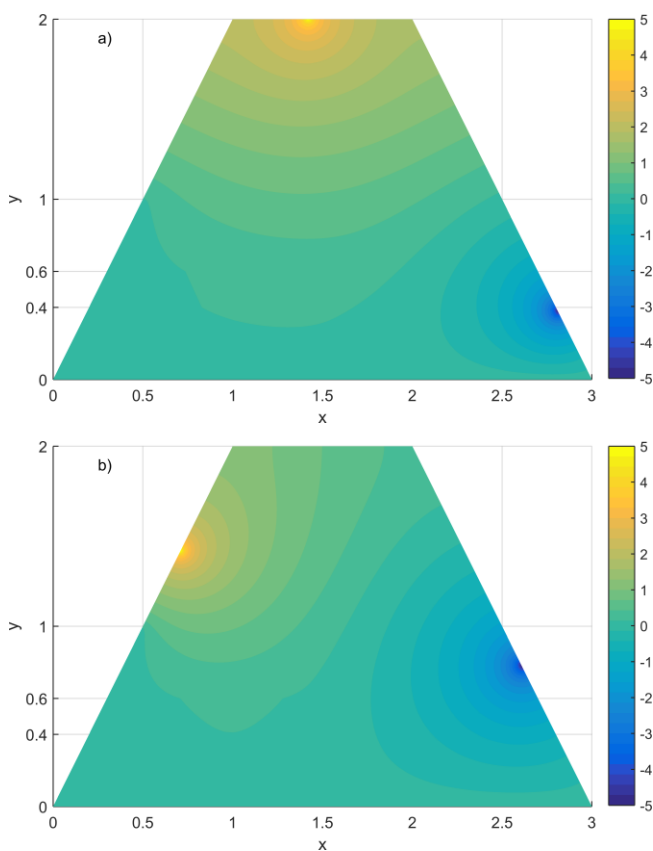


Rys. 8. Model częściowo uszkodzonego wału przeciwpowodziowego

Pozostaje jeszcze określenie warunków brzegowych. Zgodnie z rys. 7 krzywą brzegową dla domeny  $\Omega$  jest trapez. Na dłuższej podstawie trapezu kładziemy  $u = 0$  (jednorodny warunek Dirichleta). Identyczny warunek wybieramy na dolnej połowie lewego ramienia trapezu z tego względu, że na tym odcinku wał przeciwpowodziowy posiada kontakt z rzeką. Poza dwoma wybranymi

węzłami, które wyznaczają położenie elektrod prądowych na pozostałej części krzywej  $\Gamma$  przyjmujemy jednorodny warunek Neumanna ( $q = 0$ ). Pomiędzy elektrodami prądowymi przyłożone jest napięcie wynoszące 10 V.

Na potrzeby obliczeń numerycznych dokonano dyskretyzacji brzegu podobszaru (1) na 62 elementy, natomiast brzegu podobszaru (2) na 225 elementów (rys. 8). Wyniki obliczeń numerycznych dla dwóch przykładowych położen par elektrod prądowych zostały pokazane na rys. 9. Ponieważ potencjał pola elektrycznego dla tych elektrod wynosi  $\pm 5$  V, więc na tej podstawie można łatwo ustalić ich lokalizację na omawianym rysunku. Podczas wykonywania badania tomograficznego obiekt jest polaryzowany na kilka lub kilkanaście różnych sposobów. Ma to na celu zwiększenie dokładności zobrazowania jego struktury wewnętrznej [2]. Rys. 9 przedstawia rozkłady potencjału pola elektrycznego na całym obszarze. Jednak podczas rozwiązywania problemu odwrotnego wystarczy obliczyć wielkości charakteryzujące pole elektryczne tylko na brzegach obu podobszarów.



Rys. 9. Przestrzenne rozkłady potencjału pola elektrycznego stanowiące przykładowe rozwiązanie problemu prostego w ITK dla struktury pokazanej na rys. 7 (wał przeciwpowodziowy). Wyniki otrzymano dla dwóch różnych położen par elektrod prądowych

### 3. Podsumowanie

Implementacja MEB, która została wykorzystana do rozwiązania problemu prostego jest częścią systemu przeznaczanego do badania stanu wałów przeciwpowodziowych za pomocą ITK. Zarys koncepcji działania tego systemu został opisany w pracy [5].

Przedstawione w niniejszym artykule wyniki pokazują, że zagadnienie proste dla pola elektrycznego w ośrodku strefowo niejednorodnym może zostać skutecznie rozwiązane za pomocą odpowiedniej implementacji MEB. Stwarza to możliwość zastosowania opracowanej implementacji przy rozwiązywaniu problemu odwrotnego w ITK. W tym podejściu, oprócz wspomnianej już MEB wykorzystywana jest także metoda zbiorów poziomowych oraz metoda gradientowa [2, 7].

Aby zaistniała możliwość rozwiązania zagadnienia odwrotnego planowane jest odpowiednie uogólnienie programu. Uogólnienie to będzie przeprowadzone w taki sposób, aby w równaniu (4) możliwe było uwzględnienie członu źródłowego. Potrzeba wprowadzenia takiej modyfikacji wynika stąd, że metoda gradientowa w każdym kroku iteracyjnym zakłada rozwiązanie dodatkowego równania (zwanego równaniem sprzężonym), które zawiera tego typu wyraz [2].

### Literatura

- [1] Beer G.: Programming the Boundary Element Method. An Introduction for Engineers. John Wiley & Sons, Eastbourne 2001.
- [2] Filipowicz S.F., Rymarczyk T.: Tomografia Impedancyjna - pomiary, konstrukcje i metody tworzenia obrazu. BEL Studio, Warszawa 2003.
- [3] Griffiths D.J.: Podstawy elektrodynamiki. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2006.
- [4] Kythe P.K.: An introduction to Boundary Element Methods. CRC Press, USA 1995.
- [5] Olchowy D.: System impedancyjnej tomografii komputerowej bazujący na procesorze sygnałowym o niskim poborze mocy. Informatyka, Automatyka, Pomiary w Gospodarce i Ochronie Środowiska 3/2013, 57-58.
- [6] Rutkowski K. i in.: Ocena zmienności przestrzennej wilgotności gleby na podstawie map konduktywności elektrycznej. Część II. Inżynieria Rolnicza 8/2007, 225-232.
- [7] Rymarczyk T., Rymarczyk P.: Nondestructive Method for Monitoring Flood Embankment System. IIPHDW 2013, Brno, Czech Republic, September 2013.
- [8] Sikora J.: Numeryczne metody rozwiązywania zagadnień brzegowych. Politechnika Lubelska, Lublin 2011.
- [9] Wieleba P.: Otwarta, obiektowa biblioteka metody elementów brzegowych do rozwiązywania zagadnień tomografii dyfuzyjnej - Rozprawa doktorska. Instytut Elektrotechniki, Warszawa 2010.

**Mgr Paweł Tchórzewski**

e-mail: pawel.tchorzewski87@gmail.com

Absolwent Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie na kierunku fizyka (specjalność: fizyka teoretyczna). Aktualnie, podczas pracy zawodowej realizuje zadania o profilu rozwojowo-badawczym w dziedzinie numerycznych metod rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych.



otrzymano/received: 07.10.2014

przyjęto do druku/accepted: 09.06.2015