

DOI: 10.5604/01.3001.0010.7263

APROKSYMACJA WŁAŚCIWOŚCI ELEKTRYCZNYCH PERIODYCZNYCH MATERIAŁÓW ZŁOŻONYCH

Adam Steckiewicz, Bogusław Butryło

Politechnika Białostocka, Wydział Elektryczny, Katedra Elektrotechniki Teoretycznej i Metrologii

Streszczenie. W artykule przedstawiono przybliżony, zastępczy model elektryczny materiału warstwowego z warstwą powtarzalnych elementów przewodzących. Właściwości periodycznych elementów materiału, kształtowane są poprzez modyfikację ich geometrii. Zaproponowano i zweryfikowano konstrukcję modelu SISO, w którym dobrano postać funkcji aproksymujących właściwości elektryczne. Przedstawiono algorytm aproksymacji wielomianowej w odniesieniu do przykładowej struktury elementu oraz zaproponowano i scharakteryzowano parametry skupionego modelu elektrycznego.

Słowa kluczowe: materiały warstwowe, przewodność elektryczna, metoda elementów skończonych, struktury periodyczne

APPROXIMATION OF ELECTRIC PROPERTIES OF PERIODIC LAYERED COMPOSITE MATERIALS

Abstract. The paper presents a discussion on the approximate electrical model of a layered material with the distributed periodic structure of the predefined cells. The macroscopic properties of the material are shaped by the modification of the local geometry of the cell. The proposed SISO model with the polynomial approximation of some selected properties is verified. The algorithm of polynomial approximation is introduced and presented in relation to an exemplary fractal structure. It is also shown the lumped electric model of periodic cell with defined parameters.

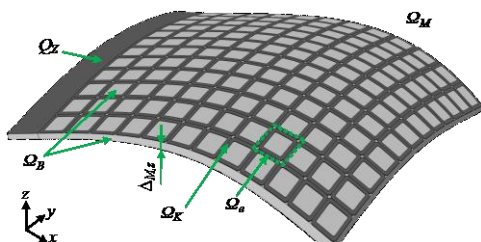
Keywords: laminar materials, electric conductivity, finite element method, periodic structures

Wstęp

Szerokie zastosowanie materiałów hybrydowych w technice, czy też specyficzne właściwości periodycznych meta-materiałów, doprowadziły do wzrostu zainteresowania sztucznymi strukturami, których zastępcze parametry mechaniczne, termiczne, czy elektryczne mogą być kształtowane w szerokim zakresie [2, 4]. Dobór parametrów materiałów złożonych możliwy jest poprzez modyfikację warstw budujących strukturę hybrydową. Modyfikacja ta dotyczyć może, np. skali elementów warstwy, materiału ją tworzącego lub geometrii wewnętrznej.

Jedną z grup materiałów hybrydowych są struktury laminarne z warstwą periodyczną tworzoną na podłożu bazowym, złożoną z powtarzalnej sieci identycznych elementów (komórek). Tego rodzaju elastyczne struktury periodyczne (rys. 1) znajdują zastosowanie zarówno jako układy aktywne z rozproszonym rozkładem obszarów generacji energii cieplnej (np. promienniki ciepła, maty ciepłne), jak i jako układy pasywne o parametrach rozłożonych (np. nagrzewnice izolowane galwanicznie) [1, 6].

Laminarne materiały warstwowe z możliwością elastycznego i szerokiego kształtowania pożądaných właściwości, są przedmiotem badań dążących do stworzenia ujednoczonych metod ich opisu oraz szacowania parametrów zastępczych. Kształtowanie ich właściwości następuje przez osadzenie i uformowanie na warstwie materiału nośnego Ω_B dobranych warstw budujących $\Omega_{K,1}, \Omega_{K,2}, \dots, \Omega_{K,n}$ o różnych właściwościach [3]. Złożona z warstw struktura tworzy materiał Ω_M , którego wypadkowe cechy bezpośrednio zależą od materiału oraz geometrii wewnętrznej warstw budujących. Ze względu na wielkość periodycznych elementów Ω_e w warstwach, tworzony materiał charakteryzuje się strukturą porowatą ze względu na zjawiska termiczne i elektryczne [4].



Rys. 1. Przykład materiału złożonego ze strukturą periodyczną

Warstwy te mogą być, np. galwanicznie połączone ze źródłem napięcia Ω_Z o stałym lub zmiennym wzdłuż osi OY rozkładzie potencjału. Obszar Ω_Z może również stanowić skupione źródło mocy cieplnej $Q = Q(t)$, a przy założeniu, że w obszarze warstwy

Ω_K nie występują rozproszone źródła ($Q_n=0$), otrzymuje się układ pasywny pracujący jako radiator cieplny.

Celem pracy było zbadanie i określenie wpływu geometrii elementów struktury periodycznej na zastępcze, określone w skali makroskopowej właściwości elektryczne elementów. Przeprowadzono analizę zmian konduktancji prostokątnej, płaskiej komórki Ω_e o proponowanej geometrii zmian profilu i wymiarów ścieżek przewodzących. W ramach pracy opracowano i poddano weryfikacji model układu, utworzony z użyciem metody elementów skończonych (MES). Na tej podstawie scharakteryzowano wpływ dwóch wybranych wymiarów elementu na jego wypadkowe parametry elektryczne. Ponadto zaproponowano metodę aproksymacji charakterystyk, a tym samym konduktancji prezentowanej struktury. Otrzymane rezultaty umożliwiają konstrukcję obwodowych schematów blokowych ze skupionymi parametrami zastępczymi dla wybranej struktury periodycznej.

1. Opis analizowanej struktury

Podstawową fazę konstrukcyjną materiału laminarnego stanowi warstwa przewodząca Ω_K , zbudowana z powtarzalnego układu elementów Ω_e o grubości $\Delta_{e,z}$. Jest ona naniesiona na fazę bazową w postaci nieprzewodzącego podłoża elastycznego Ω_B (izolator elektryczny) o grubości $\Delta_{M,z} \gg \Delta_{e,z}$. Właściwości całego układu Ω_M kształtowane są przez komórki Ω_e , zaś ich parametry są pochodną geometrii struktury wewnętrznej i rozmiarów zewnętrznych (rys. 2). Dostosowanie właściwości elementów może odbywać się na drodze doboru średnicy wycięcia wewnętrznego d_w i promienia zakrzywienia zewnętrznego wierzchołka r_z . Regulacja d_w wpływa na szerokość ścieżki d_p określonej wzorem

$$d_p = \frac{\Delta_{e,x} - d_w}{2}, \quad (1)$$

zaś modyfikacja r_z prowadzi do zmian szerokości styku d_c

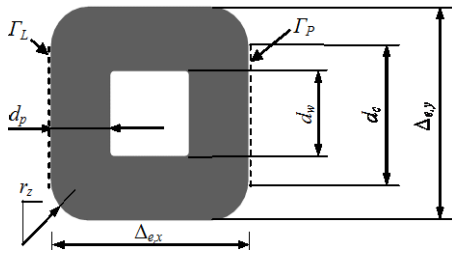
$$d_c = \Delta_{e,y} - 2r_z \quad (2)$$

między połączonymi, sąsiednimi elementami Ω_e .

Zastępczą rezystancję struktury określono na podstawie lokalnej zmiany wartości prądu elektrycznego I_e przepływającego przez element. Problem sprowadzono zatem do rozwiązania równania Laplace'a dla skalarowego, stacjonarnego pola elektrycznego, zaś następnie rozkład gęstości prądu wyznaczono wykorzystując zależność

$$J = -\sigma \nabla V, \quad (3)$$

gdzie: J – gęstość prądu elektrycznego [A/m^2], σ – przewodność elektryczna [S/m], V – potencjał elektryczny [V].

Rys. 2. Budowa przewodzącej warstwy komórki Ω_e

W badanym układzie znany jest rozkład potencjału elektrycznego V , który determinował rozptyw gęstości prądu J . Znajomość przekroju poprzecznego S w płaszczyźnie YZ komórki oraz zadanego na jej brzegach wymuszenia napięciowego

$$U_b = V_L - V_P \quad (4)$$

pozwołyli obliczyć zastępczą konduktancję elementu z zależności

$$G = \frac{I_e}{U_b} = \frac{\iint J(y, z) dS}{V_L - V_P} \quad (5)$$

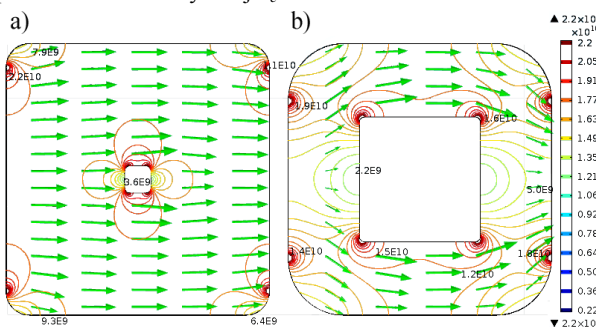
Rozwiązanie problemu rozkładu potencjału elektrycznego w układzie, otrzymano w oparciu o metodę elementów skończonych. Trójwymiarowy model struktury Ω_e poddano dyskretyzacji przy zastosowaniu h-adaptacyjnej siatki elementów trójkątnych. Na powierzchniach Γ_L i Γ_P (rys. 2) założono warunki brzegowe I rodzaju w postaci stałego potencjału: $V_L = V(\Gamma_L) = 1$ V i $V_P = V(\Gamma_P) = 0$ V. W rozważaniach pominięto przewodzenie prądu elektrycznego przez podłoże Ω_B (idealny izolator) na którym osadzona jest obliczana struktura.

W celu określenia zmienności konduktancji w funkcji parametrów geometrycznych, modyfikowano d_w i r_z , przy stałych wymiarach zewnętrznych komórki $\Delta_{e,x}$, $\Delta_{e,y}$, $\Delta_{e,z}$ wynoszących odpowiednio $5 \times 5 \times 0,05$ mm oraz przy niezmienniej przewodności elektrycznej σ_e materiału elementu (miedzi).

Tabela 1. Geometria i zastępcze właściwości elektryczne wybranych wariantów konstrukcyjnych struktur Ω_e

Nr	1	2	3	4
d_w	0,5 mm	0,88 mm	2,3 mm	3,85 mm
r_z	0,44 mm	1,6 mm	1,05 mm	0,2 mm
G	2799,61 S	1937,95 S	1578,31 S	716,22 S
R	0,357 m Ω	0,516 m Ω	0,634 m Ω	1,396 m Ω

Szeroka gama możliwych do uzyskania geometrii elementu pozwala na dowolne dopasowanie jego właściwości elektrycznych (tab. 1). W wyniku regulacji d_w i r_z konduktancja elementu zmienia się w zakresie $G \in \langle 0; G_0 \rangle$, gdzie G_0 jest konduktancją izotropowej prostokątnej struktury o wymiarach $\Delta_{e,x}$, $\Delta_{e,y}$, $\Delta_{e,z}$ i przewodności elektrycznej σ_e .

Rys. 3. Rozkład modułu gęstości prądu $[A/m^2]$: a) struktura nr 1; b) struktura nr 3

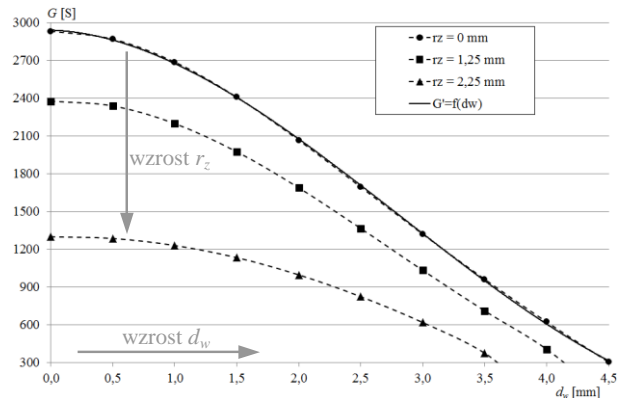
Zależność (5) łączy wartość konduktancji z natężeniem prądu elektrycznego w ramach geometrii elementu. Nieznaczne zniekształcenie jego kształtu względem struktury prostokątnej, nie

powoduje znaczących zmian w rozptywie prądu elektrycznego, którego droga w obrębie elementu pozostaje w przybliżeniu równoległa (rys. 3a). W innym przypadku (rys. 3b) ładunki elektryczne przemieszczają się po zdeformowanej, nieliniowej drodze, zaś efektywny przekrój poprzeczny S zostaje zmniejszony.

2. Analiza wpływu geometrii elementu na jego zastępczą konduktancję elektryczną

Przedstawioną strukturę elementu (rys. 2) poddano analizie numerycznej, aby określić zmienność konduktancji w funkcji wybranych parametrów geometrycznych. Przy założonych, stałych wymiarach komórki $\Delta_{e,x}$, $\Delta_{e,y}$, $\Delta_{e,z}$ i przewodności elektrycznej σ_e warstwy Ω_K , modyfikowano stopniowo średnicę wycięcia d_w i promień r_z . Wyznaczone z uwzględnieniem zjawisk polowych zastępcze wartości konduktancji ilustrują rys. 4 i 5. Wykonane próby charakteryzacji próbki materiału przeprowadzono najpierw zmieniając d_w przy r_z wynoszącym 0, 1,25, 2,25 mm. W osobnych testach identyczną procedurę powtórzono dla promienia r_z przy d_w wynoszącym kolejno 0, 1,75, 3,5 mm. Otrzymane w wyniku prób wartości przewodności $G = f(d_w, r_z)$ aproksymowano wielomianami. Postać wielomianową dobierano przy uwzględnieniu kryterium najmniejszego błędu średniokwadratowego. Na wykresy (rys. 4 i 5) dodatkowo naniesiono krzywe interpolacyjne $G' = f(d_w)$ i $G'' = f(r_z)$ aproksymujące przebiegi $G = f(d_w, 0)$ oraz $G = f(0, r_z)$ wielomianem stopnia $n = 3$.

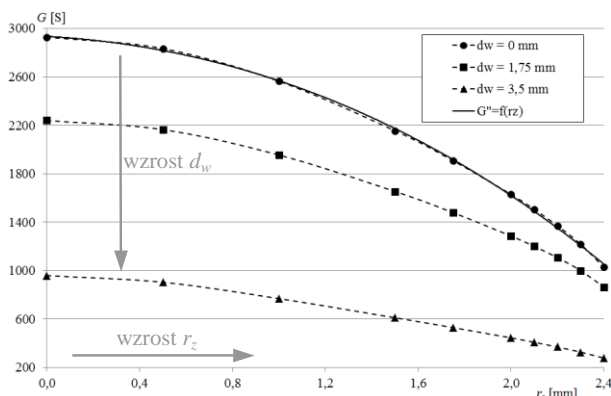
Aproksymacja wybranych charakterystyk wielomianem, umożliwia stworzenie przybliżonego opisu analitycznego właściwości elementu. Krzywe G' i G'' z rys. 4 i 5 określono zakładając eliminowanie wpływu drugiej zmiennej nieliniowej (np. $G' = f(d_w)$ przy $r_z = 0$ mm). Tak otrzymane krzywe wykorzystano do późniejszego sformułowania metody aproksymacji zastępczej konduktancji elementu.

Rys. 4. Zmiany konduktancji $G = f(d_w)$ w funkcji średnicy wycięcia wewnętrznego d_w przy różnych r_z oraz przebieg funkcji aproksymującej $G' = f(d_w)$ przy $r_z = 0$ mm

Konduktancja komórki nie zależy liniowo od d_w , sukcesywnie malejąc przy wzroście tego parametru. Związane jest to z deformacją geometrii elementu, a co za tym idzie – redukcją szerokości ścieżki przewodzącej d_p . Rozptyw prądu w elemencie zmienia się (rys. 3b) również ze względu na wydłużenie drogi przepływu prądu. Oba efekty, czyli redukcja zastępczego przekroju i wydłużenie drogi przepływu prądu elektrycznego, prowadzą do spadku konduktancji. Szerokość ścieżki d_p jest wyznaczana w płaszczyźnie poziomej osi symetrii elementu, zatem w ogólności szerokość drogi dla prądu elektrycznego, w dowolnym przekroju elementu, zależy także od promienia zakrzywienia r_z .

Czynnikiem zwiększającym rezystancję elementu jest także szerokość kontaktu d_c , wpływającego na rezystancję styku pomiędzy połączonymi elementami. Z (2) wynika, iż wzrost r_z prowadzi do redukcji kontaktu d_c . Zgodnie z rys. 4 konduktancja maleje przy coraz większym r_z . Potwierdzają to charakterystyki $G = f(r_z)$ z rys. 5. Kształtowanie zastępczej konduktancji w funkcji promienia zakrzywienia zewnętrznego przebiega płynnie i nie

występuje tam punkt przegięcia, jak w przypadku charakterystyki $G = f(d_w)$. Zależność ta jest jednak także nieliniowa. Wartość przewodności szybko maleje do zera po przekroczeniu $r_z = 2,1$ mm. Efekt ten wynika ze zmniejszenia efektywnej powierzchni styku między sąsiednimi elementami, na skutek zwiększenia promienia profilu wierzchołka r_z .



Rys. 5. Zmiany konduktancji $G = f(r_z)$ w funkcji promienia zakrzywienia zewnętrznego r_z przy różnych d_w oraz przebieg funkcji aproksymującej $G'' = f(r_z)$ przy $d_w = 0$ mm

Modyfikacja geometrii struktur periodycznych umożliwia kształtowanie zastępczych właściwości elektrycznych. Te same rezultaty uzyskać można dla różnych konfiguracji elementarnego segmentu Ω_e , np. $G = 600$ S uzyskuje się przy $d_w = 3$ mm i $r_z = 2,25$ mm (rys. 4) lub przy $d_w = 3,5$ mm i $r_z = 1,54$ mm (rys. 5). Różnica geometrii w obu przypadkach nie wpływa na wartość przepływającego prądu elektrycznego, ale modyfikuje kształt powierzchni elementu.

Ponadto charakterystyka materiału periodycznego w funkcji jego parametrów geometrycznych, umożliwia ilościową optymalizację struktury. Przytoczone przykłady elementów (dla $G = 600$ S) odznaczają się różną objętością materiału użytego do ich budowy. Efektywniejsza pod tym względem jest druga struktura ($d_w = 3,5$ mm; $r_z = 1,54$ mm), która wykorzystuje ponad 7,5% mniej materiału.

Analiza zagadnień termicznych związanych ze strukturą periodyczną wykaże, że kształt geometrii wpływa bezpośrednio na rozkład źródeł ciepła w elemencie. Możliwe staje się zatem uzyskanie innego rozkładu wewnętrznych, rozproszonych źródeł ciepła w elemencie, przy identycznych warunkach (napięciu i prądzie) zasilania elektrycznego i tym samym identycznej wydzielanej mocy cieplnej.

3. Metoda wielomianowej aproksymacji zastępczej konduktancji elementu

Funkcje nieokresowe na określonym przedziale domkniętym $[a;b]$ przybliżać można wielomianem, który im jest wyższego rzędu, tym dokładniej odwzorowuje rzeczywistą charakterystykę [5]. Aproksymacja taka jest konieczna, ze względu na niemożliwe utworzenie dokładnego analitycznego opisu i lokalne zjawiska polowe. Proponowana metoda aproksymacji właściwości elementu, z wykorzystaniem konduktancji opisanej funkcją uwiklaną, ma za zadanie uwzględnienie wpływu wielkości od których konduktancja zależna jest liniowo i nieliniowo. Jednym z założeń jest także wprowadzenie jawnej separacji poszczególnych czynników, wpływających na wypadkową wartość przewodności.

Rozważmy schemat blokowy układu SISO (rys. 6). Niech wymuszeniem będzie napięcie U , a odpowiedzią natężenie prądu I . Transmitancja układu równa jest konduktancji G . Ta z kolei jest zależna od p liniowych parametrów w_1, \dots, w_p oraz od r funkcji nieliniowych $f(x_1), \dots, f(x_r)$, gdzie x_1, \dots, x_r są zmiennymi funkcji. Na postawie reguł opisu schematów blokowych zapisać można ogólny wzór

$$G(w_1, \dots, w_p, x_1, \dots, x_r) = w_1 \cdot \dots \cdot w_p \cdot f(x_1) \cdot \dots \cdot f(x_r) \quad (6)$$

Założmy, że funkcje nieliniowe będą opisane wielomianem stopnia n , czyli

$$f(x_j) = a_{j,n} \cdot x_j^n + a_{j,n-1} \cdot x_j^{n-1} + \dots + a_{j,1} \cdot x_j + 1, \quad (7)$$

gdzie: $a_{j,0}, \dots, a_{j,n}$ – współczynniki wielomianu j -tej zmiennej.

Wprowadźmy wektory współczynników wielomianu w postaci

$$\mathbf{a}_j = [a_{j,n} \ \dots \ a_{j,1} \ 1], \dim(\mathbf{a}_j) = (n+1) \times 1, a_{j,n} \in \mathfrak{R} \quad (8)$$

oraz wektory zmiennych wielomianu n -tego stopnia jako

$$\mathbf{x}_j = [x_j^n \ \dots \ x_j \ 1], \dim(\mathbf{x}_j) = (n+1) \times 1, x_j^n \in \mathfrak{R}. \quad (9)$$

Wówczas każdą z funkcji nieliniowych opisuje równanie

$$f(x_j) = \mathbf{a}_j \mathbf{x}_j^T. \quad (10)$$

Wstawiając (10) do (6) otrzymujemy zależność opisującą konduktancję elementu aproksymowanego wielomianem stopnia n

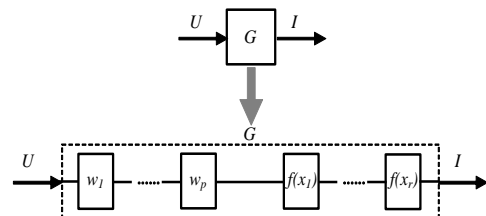
$$G(w_1, \dots, w_p, x_1, \dots, x_r) = \prod_{i=1}^p w_i \cdot \prod_{j=1}^r (\mathbf{a}_j \mathbf{x}_j^T) + \varepsilon, \quad (11)$$

gdzie: i – numer parametru liniowego, j – numer zmiennej nieliniowej, ε – błąd aproksymacji. Rozwiązanie równania (11) obejmuje znalezienie takich wektorów \mathbf{a}_j przy określonym rzędzie n wielomianów aproksymujących, aby błąd aproksymacji ε był jak najmniejszy ($\varepsilon = \varepsilon_{\min}$). W przypadku idealnej aproksymacji $\varepsilon = 0$. Rozwikłanie tego problemu jest utrudnione ze względu na występujący dla $r > 1$ naprzemienny iloczyn wektora współczynników \mathbf{a}_j i wektora \mathbf{x}_j zawierającego wszystkie potęgi x_j .

Jedną z metod rozwiązania jest eliminowanie z zależności (11) wszystkich zmiennych w równaniach nieliniowych poza tą zmienną x_j , dla której poszukujemy odpowiadającego jej wektora \mathbf{a}_j . Zatem poszukując rozwiązania dla x_1 zakładamy, że $x_2 = 0, \dots, x_r = 0$. Wówczas przy założonych stałych w_1, \dots, w_p i znanym przebiegu funkcji $G_1 = f(w_1, \dots, w_p, x_1)$ zgodnie z (11) mamy

$$G_1(w_1, \dots, w_p, x_1) = \prod_{i=1}^p w_i - \mathbf{a}_1 \mathbf{x}_1 = \varepsilon_1. \quad (12)$$

Poszukiwany wektor \mathbf{a}_1 dla zmiennej x_1 jest rozwiązaniem (12), gdy $\varepsilon_1 = \varepsilon_{1,\min}$. Znalezienie \mathbf{a}_1 można zrealizować, np. w oparciu o numeryczne algorytmy wyliczeniowe. W podany sposób znajduje się wektory \mathbf{a} dla kolejnych zmiennych x .



Rys. 6. Ideowy schemat modelu zastępczego SISO dla elementu o konduktancji G

W rozpatrywanym przypadku niejednorodnego elementu Ω_e poszukiwano zależności określającej wartość zastępczej konduktancji G_e dla $p = 2$ parametrów liniowych:

- $w_1 = \sigma_e$ – przewodność elektryczna warstwy Ω_K ,
- $w_2 = \Delta_{e,z}$ – wysokość (grubość) warstwy Ω_K ,

oraz $r = 2$ parametrów opisanych funkcjami wielomianowymi:

- $x_1 = d_w$ – średnica wycięcia wewnętrznego elementu Ω_e ,
- $x_2 = r_z$ – promień zakrzywienia zewnętrznego wierzchołka Ω_e .

Konduktancja $G_e = f(\sigma_e, \Delta_{e,z}, d_w, r_z)$ przedstawiona może być w postaci schematu blokowego (rys. 7), a na podstawie (6) zależność na zastępczą konduktancję elementu przyjmijmy postać

$$G_e = \sigma_e \cdot \Delta_{e,z} \cdot f(d_w) \cdot f(r_z). \quad (13)$$

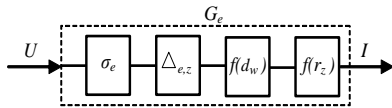
Natomiast wzory opisujące funkcje $f(d_w)$ i $f(r_z)$ wielomianami stopnia $n = 3$ mają postać

$$f(d_w) = a_{1,3} \cdot d_w^3 + a_{1,2} \cdot d_w^2 + a_{1,1} \cdot d_w + 1 = \mathbf{a}_1 \mathbf{d}_w^T, \quad (14)$$

$$f(r_z) = a_{2,3} \cdot r_z^3 + a_{2,2} \cdot r_z^2 + a_{2,1} \cdot r_z + 1 = \mathbf{a}_2 \mathbf{r}_z^T. \quad (15)$$

Podstawiając (15) i (14) do (13) przy znanym σ_e i $\Delta_{e,z}$ możemy wykorzystując wzór (12) wyznaczyć wektor \mathbf{a}_1 opisujący współczynniki funkcji $f(d_w)$, gdzie $G_1 = f(\sigma_e, \Delta_{e,z}, d_w, 0)$.

Identycznie wyznaczany jest wektor \mathbf{a}_2 dla $G_2 = f(\sigma_e, \Delta_{e,z}, 0, r_z)$. Zależności G_1 i G_2 zaprezentowano w postaci charakterystyk $G = f(d_w)$ dla $r_z = 0$ na rys.4 oraz $G = f(r_z)$ dla $d_w = 0$ na rys. 5. Charakterystyki te aproksymowano wspomnianymi krzywymi G' i G'' .



Rys. 7. Zredukowany schemat blokowy konduktancji dla elementu Ω_e .

Zastosowanie wyszukiwania metodą najmniejszych kwadratów do poszukiwania optymalnego rozwiązania równania (13), skutkowało znalezieniem współczynników dla wielomianów o kilku wybranych stopniach (Tab. 2). Są to parametry jednoznacznie identyfikujące wpływ wybranych parametrów geometrycznych dla proponowanej struktury elementu. Coraz wyższe stopnie wielomianu pozwalają dokładniej aproksymować rzeczywistą charakterystykę, bowiem błąd przybliżenia maleje wraz ze wzrostem stopnia wielomianu.

Tabela 2. Współczynniki wielomianów aproksymujących stopnia $n \in \{3, 4, 5\}$

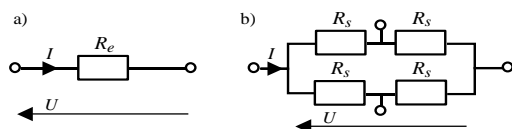
Funkcja	$f(d_w)$			Funkcja	$f(r_z)$		
Rząd n	3	4	5	Rząd n	3	4	5
$a_{1,5}$	0	0	-0,0004	$a_{2,5}$	0	0	-0,0335
$a_{1,4}$	0	-0,0014	0,0026	$a_{2,4}$	0	-0,0341	0,1802
$a_{1,3}$	0,0104	0,0228	0,0071	$a_{2,3}$	-0,0149	0,1570	-0,3267
$a_{1,2}$	-0,0880	-0,1232	-0,0981	$a_{2,2}$	-0,0526	-0,3226	0,1233
$a_{1,1}$	-0,0126	0,0184	0,0048	$a_{2,1}$	-0,0589	0,0707	-0,0661

Przeprowadzone testy wykazały, że wyznaczone charakterystyki mogą być aproksymowane wielomianami co najmniej rzędu 3. Średniokwadratowy błąd przybliżenia spada wówczas poniżej 3,5%, przy odchyleniu standardowym nie przekraczającym 0,5%.

Tabela 3. Porównanie wartości rezystancji dla dwóch metod obliczeniowych

d_w [mm]	r_z [mm]	R_2 [mΩ]	ΔR_2 [%]	R_4 [mΩ]	ΔR_4 [%]	R_5 [mΩ]	ΔR_5 [%]
0,5	2,25	0,81	4,36	0,80	2,72	0,79	1,98
4,5	0,25	3,25	-3,26	3,19	-5,01	3,24	-3,75
2,5	1,25	0,72	-1,64	0,73	-0,71	0,73	-0,98
2,2	1,89	0,87	2,92	0,86	2,10	0,86	2,70
1,1	0,43	0,40	2,27	0,39	0,37	0,39	1,19
1,9	2,00	0,85	4,52	0,84	3,12	0,84	3,35

Zależność (13) wraz ze znanymi współczynnikami wielomianów stopnia $n \in \{3, 4, 5\}$, posłużyła do oszacowania rezystancji zastępczej R_n kilku elementów o różnych d_w i r_z (Tab. 3). Określono dla nich błąd względny ΔR_n , porównując je z wartościami uzyskanymi na bazie obliczeń metodą elementów skończonych. Błąd ten z reguły nie przekraczał 5%, co świadczy o dostatecznej dokładności proponowanej metody wielomianowej do estymacji rezystancji. Wartości błędów dla poszczególnych wielomianów aproksymujących są zbliżone, więc za zadowalające można uznać wyniki uzyskane już dla wielomianu stopnia 3-ego.



Rys. 8. Schemat elektryczny elementu Ω_e : a) w postaci pojedynczej rezystancji zastępczej; b) w postaci czterech rezystancji składowych

Znajomość konduktancji G_e pozwala zbudować schemat elektryczny komórki Ω_e , modelowanej w postaci pojedynczej rezystancji R_e (rys. 8a). Ze względu na symetrię, komórka Ω_e o rozpatrywanej geometrii styka się z czterema sąsiednimi elementami. Stąd bardziej adekwatny jest schemat zastępczy z czterema węzłami (rys. 8b), w którym rezystancje cząstkowe R_s mają jednakowe wartości. Sprawdzając schemat z rys. 8b do rezystancji zastępczej otrzymujemy

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_s + R_s} + \frac{1}{R_s + R_s} = \frac{1}{R_s} \Rightarrow R_e = R_s \quad (16)$$

Wypadkowa rezystancja zastępcza R_e , w przypadku symetrycznego elementu Ω_e , odpowiada rezystancji cząstkowej R_s .

Przedstawiona metoda aproksymacji, bazująca na obliczeniach połowych, pozwala na określenie zastępczych właściwości elementu konstrukcyjnego. Na tej podstawie możliwe jest analizowanie układów złożonych z rozpatrywanych elementów. Makroskopowe, zastępcze parametry elektryczne układów jednorodnych wprost wynikają z właściwości elementów składowych. Właściwości układów złożonych są determinowane przez zróżnicowanie struktury połączeń elementów i skalę układu, tzn. liczbę elementów i sposób ich połączenia.

Podsumowanie

W artykule przybliżono problem wyznaczania i aproksymacji właściwości elektrycznych materiałów laminarnych z warstwą periodyczną. Określono zależność zastępczej konduktancji od wybranych parametrów geometrycznych dla proponowanej struktury elementu. Wykazano nieliniową zależność konduktancji w funkcji zmian geometrii komórki, przybliżoną wielomianami odpowiednio wysokiego stopnia. Otrzymane charakterystyki wskazują także na możliwość uzyskania jednakowych właściwości elektrycznych przy odmiennej budowie elementu.

Zaprezentowano metodę aproksymacji konduktancji w funkcji kilku zmiennych, w tym zmiennych nieliniowych opisujących parametry strukturalne elementu. Otrzymana zależność umożliwia separację poszczególnych czynników wpływających na zastępczą przewodność komórki. Omówiono algorytm szacowania współczynników wielomianów aproksymujących i wpływ stopnia wielomianów na dokładność aproksymacji rezystancji struktury.

Badania zostały zrealizowane w ramach pracy S/WE/1/2013 i sfinansowane ze środków na naukę MNIŚW.

Literatura

- [1] Blanc M., Touratier M.: A constrained discrete layer model for heat conduction in laminated composites. Computers and Structures 83/2005, 1705–1718.
- [2] Gerenrot D., et al.: Random network model for heat transfer in high contrast composite materials. IEEE Trans. on Advanced Packaging 2003, 410–416.
- [3] Korzeniewska E., Jakubas A.: Pomiar rezystancji powierzchniowej warstw cienkich o dowolnych kształtach wytworzonych na podłożach elastycznych. Przegląd Elektrotechniczny 12/2014, 233–236.
- [4] Pal R.: Electromagnetic, mechanical, and transport properties of composite materials. CRC Press, 2014.
- [5] Pleśniak W.: Czebyszew, Weierstrass, Jackson, Bernstein i ich kontynuatorzy. Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Seria II Wiadomości Matematyczne XL 2004, 97–106.
- [6] Taya M.: Electronic composites. Cambridge University Press, 2005.
- [7] Tian J., et al.: Cross flow heat exchange of textile cellular metal core sandwich panels. Int. Journal of Heat and Mass Transfer 50/2007, 2521–2536.

Mgr inż. Adam Steckiewicz

e-mail: a.steckiewicz@doktoranci.pb.edu.pl

Absolwent Wydziału Elektrycznego Politechniki Białostockiej w dyscyplinie naukowej Elektrotechnika. Obecnie doktorant w Katedrze Elektrotechniki Teoretycznej i Metrologii. W swojej pracy zajmuje się teoretycznym opisem zjawisk elektrycznych i termicznych w złożonych materiałach periodycznych oraz układach elektrycznych.



Dr hab. inż. Bogusław Butryło

e-mail: b.butrylo@pb.edu.pl

Adiunkt na Wydziale Elektrycznym Politechniki Białostockiej. Zajmuje się problematyką analizy pól elektromagnetycznych w układach złożonych, w tym zawierających materiały o właściwościach dyspersyjnych. Prowadzone prace dotyczą szerokopasmowego sformułowania i realizacji metody elementów skończonych i różnic skończonych oraz zastosowania metod przetwarzania rozproszonego w analizie pól.



otrzymano/received: 15.06.2016

przyjęto do druku/accepted: 22.11.2017