

# MODELOWANIE I ANALIZA POLA MAGNETYCZNEGO W NIETYPOWYCH UKŁADACH WSPÓLRZĘDNYCH

Mikołaj Skowron

AGH Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica w Krakowie, Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Elektroniki,  
Katedra Elektrotechniki i Elektroenergetyki

**Streszczenie.** Prezentowany artykuł zawiera rozwiązanie równania Laplace'a dla układu współrzędnych sferoidy spłaszczonej oraz obliczenia rozkładu pola magnetycznego wewnątrz sferoidy spłaszczonej umieszczonej w jednorodnym polu magnetycznym. Modelowana sferoida ma paramagnetyczne właściwości magnetyczne. Umieszczenie sferoidy spłaszczonej o takich właściwościach powoduje zniekształcenie rozkładu pola magnetycznego, największe odkształcenia są na granicach ośrodków. Wielkość tych zmian zależy od ułożenia modelowanej sferoidy względem polaryzacji pola.

**Słowa kluczowe:** pole magnetyczne, równanie Laplace'a

## MODELING AND ANALYSIS OF MAGNETIC FIELD FOR UNTYPICAL COORDINATE SYSTEMS

**Abstract.** The paper presents solution of the Laplace equation for the oblate spheroid coordinate system and calculation of the magnetic field distribution inside the oblate spheroid placed in a uniform magnetic field. Modeled spheroid is paramagnetic. The oblate spheroid with such properties deformation the magnetic field distribution, the biggest deformation on borders of resorts. The magnitude of these changes depends on the pose spheroids modeled the polarization field.

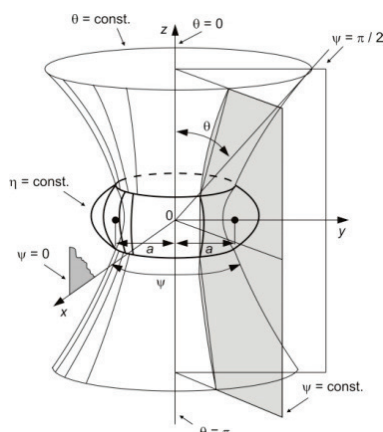
**Keywords:** magnetic field, Laplace's equation

### Wstęp

Dla określenia zjawisk zachodzących w paramagnetykach umieszczonych w polu magnetycznym konieczne jest w pierwszej kolejności wyznaczenie pola magnetycznego wewnątrz oraz wokół badanych obiektów. Jedną z możliwych metod jest otoczenie badanego obiektu powierzchniami drugiego stopnia [6,10]. Zastosowanie geometrii sferycznych pozwala objąć większość możliwych kształtów. Jest to główny powód szerokiego wykorzystania tych geometrii. Szczególnym przypadkiem sferoidy jest sferoida spłaszczona, stosuje się ją do przybliżenia wielu różnych kształtów min. cząsteczek, ziarniaków roślin, ciała człowieka i zwierząt a nawet łodzi podwodnych [1, 2, 3, 11, 14].

### 1. Współrzędne sferoidy spłaszczonej

Układ współrzędnych sferoidy spłaszczonej tworzy się przez przyjęcie ortogonalnej rodziny współosiowych elips i hiperbol i obrót dookoła mniejszych osi elips. Otrzymane powierzchnie współrzędnych są spłaszczonymi sferoidami, półpłaszczyznami i hiperboloidami jednopowłokowymi [7].



Rys. 1. Współrzędne sferoidy spłaszczonej

Współrzędne sferoidy spłaszczonej ( $\eta$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ ) związane są ze współrzędnymi prostokątnymi następującymi zależnościami:

$$\begin{aligned} x &= a \cosh \eta \sin \theta \cos \psi \\ y &= a \cosh \eta \sin \theta \sin \psi \\ z &= a \sinh \eta \cos \theta \end{aligned} \quad (1)$$

Powierzchnie  $\eta = \text{const.}$  są sferoidami spłaszczonymi

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2)$$

gdzie:  $b = a \cosh \eta$ ,  $c = a \sinh \eta$ ,  $a$  – ogniskowa rodziny sferoid.

Parametr  $\eta$  zmienia się w przedziale od 0 do  $\infty$ . Jeżeli  $\eta = 0$  sferoida przyjmuje kształt odcinka o długości  $2a$ , leżącego na osi OZ. Dla  $\eta \rightarrow \infty$  sferoida staje się kulą o nieskończonej długości promienia.

Zmienna  $\theta$  przyjmuje wartości w zakresie od 0 do  $\pi$ , przy czym wartość 0 związana jest z dodatnim kierunkiem osi  $z$ , w szczególnym przypadku  $\theta = \pi/2$ , hiperboloida przechodzi w płaszczyznę  $xy$  z kołowym otworem o promieniu  $a$ .

Natomiast zmienna  $\psi$  przyjmuje wartości w zakresie od 0 do  $2\pi$ , jest to kąt mierzony wokół osi  $z$ . Powierzchnie o stałych wartościach  $\psi$  są półpłaszczyznami przechodzącymi przez oś  $z$ .

Przez analogię dla współrzędnej  $\theta$  można używać określenia „długość geograficzna” a dla  $\psi$  „szerokość geograficzna” [7, 8].

### 2. Równanie Laplace'a

Dla wyznaczenia rozkładu pola magnetycznego wewnątrz i w otoczeniu rozważanego modelu ziarniaka użyto równania Laplace'a w układzie sferoidy spłaszczonej. Metodą analityczną rozwiązania równania Laplace'a zastosowaną w obliczeniach jest metoda rozdzielania zmiennych. Metodę rozdzielania zmiennych można użyć tylko wtedy, kiedy granice środowisk są powierzchniami współrzędnych. Wobec tego przyjmuje się naturalne założenie, że w sferoidalnym modelu powierzchnie rozgraniczające środowiska są opisane równaniami  $\eta = \text{const.}$

We współrzędnych sferoidy spłaszczonej równanie Laplace'a ma postać [7]:

$$\begin{aligned} \nabla^2 V_m &= \frac{1}{a^2 (\cosh^2 \eta - \sin^2 \theta)} \\ \left( \frac{\partial^2 V_m}{\partial \eta^2} + \text{tgh} \eta \frac{\partial V_m}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 V_m}{\partial \theta^2} + \text{ctg} \theta \frac{\partial V_m}{\partial \theta} \right) + \\ & \frac{1}{a^2 \cosh^2 \eta \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V_m}{\partial \psi^2} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Po rozdzielaniu zmiennych otrzymuje się układ równań [7]:

$$\frac{d^2 \psi}{d\psi^2} + q^2 \psi = 0 \quad (4)$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\theta^2} + \text{ctg} \theta \frac{d\theta}{d\theta} + \left[ p(p+1) + \frac{q^2}{\sin^2 \theta} \right] \theta = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d^2 H}{d\eta^2} + \text{tgh} \eta \frac{dH}{d\eta} + \left[ -p(p+1) + \frac{q^2}{\cosh^2 \eta} \right] H = 0 \quad (6)$$

W przypadku, jeżeli  $V_m$  jest funkcją wszystkich trzech zmiennych przestrzennych ( $\eta$ ,  $\theta$ ,  $\psi$ ), szczególnym rozwiązaniem równania Laplace'a są równania:

$$\begin{aligned} V_m &= P_p^q(i \sinh \eta) P_p^q(\cos \theta) \sin q \psi \\ V_m &= Q_p^q(i \sinh \eta) Q_p^q(\cos \theta) \cos q \psi \end{aligned} \quad (7)$$

Jeżeli potencjał  $V_m$  zależy tylko od współrzędnej  $\eta$ , równanie Laplace'a upraszcza się do wyrażenia:

$$\frac{d^2 V_m}{d\eta^2} + \operatorname{tgh}\eta \frac{dV_m}{d\eta} = 0 \quad (8)$$

W przypadku istnienia symetrii osiowej, potencjał jest tylko funkcją współrzędnej  $\eta$ , równanie Laplace'a przyjmuje zatem postać (8), a jego rozwiązaniem ogólnym są równania [7,8]:

$$V_m = A + B \operatorname{arctg}(\sinh\eta) \quad (9)$$

lub

$$V_m = C + D \operatorname{arctg}(\sinh\eta) \quad (10)$$

w których  $A, B, C, D$  – stałe całkowania.

### 3. Natężenie pola magnetycznego wewnątrz sferoidy spłaszczonej umieszczonej w jednorodnym polu magnetycznym

W celu wyznaczenia rozkładu pola magnetycznego wewnątrz sferoidy spłaszczonej, zakładając symetrię osiową, należy przyjąć następujące warunki brzegowe [4, 5, 9, 12, 13, 15]:

$$\eta = \eta_0 \rightarrow V_m = 0, \\ \eta \rightarrow \infty \rightarrow V_m = H_0 z = H_0 a \sinh\eta \cos\theta$$

Rozwiązanie równania Laplace'a w analizowanym przypadku ma postać:

$$V_m(\eta) = H_0 \left\{ 1 - \frac{\sinh\eta_0}{\sinh\eta} \left[ \frac{\sinh\eta \operatorname{arctg}(\sinh\eta) - 1}{\sinh\eta_0 \operatorname{arctg}(\sinh\eta_0) - 1} \right] \right\} \quad (11)$$

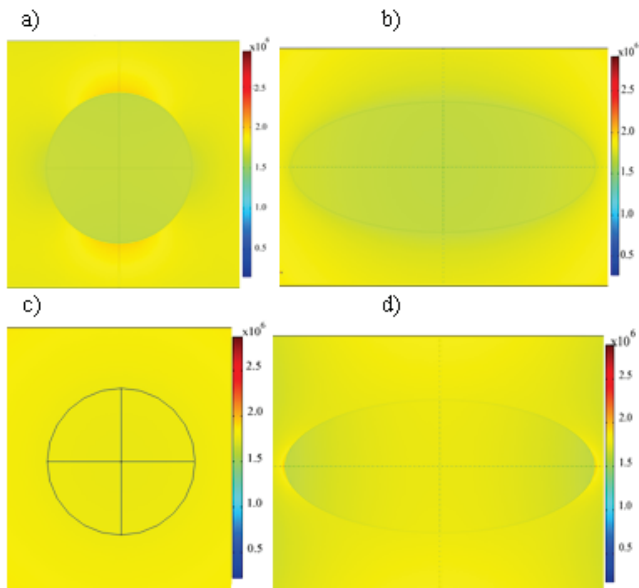
Do wyznaczenia natężenia pola, korzysta się z zależności:

$$\mathbf{H} = -\frac{a_\eta}{\sqrt{g_{11}}} \frac{dV_m}{d\eta} \quad (12)$$

Ostatecznie otrzymuje się:

$$\mathbf{H} = H_0 a_\eta \left[ 1 + \frac{\sinh\eta_0 \operatorname{arctg}(\sinh\eta_0) - \operatorname{tgh}^2 \eta_0}{1 - \sinh\eta_0 \operatorname{arctg}(\sinh\eta_0)} \right] \quad (13)$$

Rysunek 2 przedstawia rozkład natężenia pola magnetycznego wewnątrz oraz wokół sferoidy spłaszczonej o właściwościach paramagnetycznych, umieszczonej w jednorodnym polu magnetycznym.



Rys. 2. Rozkłady natężenia pola magnetycznego dla sferoidy spłaszczonej umieszczonej w jednorodnym polu magnetycznym spolaryzowanym wzdłuż krótszej osi sferoidy dla: a) płaszczyzny  $z = 0$ , b) płaszczyzny  $x = 0$ . Rozkłady natężenia pola magnetycznego dla sferoidy spłaszczonej umieszczonej w jednorodnym polu magnetycznym spolaryzowanym wzdłuż dłuższej osi sferoidy dla: c) płaszczyzny  $z = 0$ , d) płaszczyzny  $y = 0$

### 4. Wnioski

Sferoida spłaszczona o właściwościach paramagnetycznych, umieszczona w jednorodnym polu, powoduje zniekształcenie tego pola. Rozpatrując przypadek pola magnetycznego spolaryzowanego wzdłuż jednej z krótszych osi można zauważyć, że największe zniekształcenia są na granicy ośrodków gdzie linie pola wnikają w sferoidę pod większym kątem. Dla płaszczyzny  $z = 0$  pole magnetyczne wewnątrz sferoidy nieznacznie rośnie zbliżając się do jej środka, względem krawędzi sferoidy. Natomiast dla powierzchni  $x = 0$  natężenie pola nieznacznie maleje zbliżając się do środka sferoidy względem jej krawędzi.

Analizując drugi przypadek, w którym pole magnetyczne jest spolaryzowane wzdłuż dłuższej osi sferoidy, można zaobserwować, że zniekształcenia pola magnetycznego są największe na granicy ośrodków gdzie linie pola wnikają do wnętrza sferoidy pod większym kątem. Dla płaszczyzny  $z = 0$ , natężenie pola magnetycznego, zbliżając się do środka sferoidy nieznacznie maleje w stosunku do krawędzi sferoidy. Dla płaszczyzny  $y = 0$  jest przeciwnie tzn. bliżej środka sferoidy pole rośnie względem krawędzi. Na zewnątrz sferoidy przy największej krzywiznie powstaje szybki wzrost pola, który następnie maleje do wartości pola zewnętrznego.

Wewnątrz namagnesowanej sferoidy spłaszczonej natężenie pola magnetycznego ma stałą wartość w całej przestrzeni. Na zewnątrz sferoidy na granicy ośrodków, natężenie pola nieznacznie rośnie i następnie szybko maleje. Wzrost natężenia jest tym większy im większa jest krzywizna sferoidy. Zniekształcenie pola jest większe dla sferoidy namagnesowanej wzdłuż dłuższej osi.

### Literatura

- [1] Aird G. J. C.: *Modeling the induced magnetic signature of naval vessels*, University of Glasgow, 2000.
- [2] Cieśla A., Skowron M.: *The analysis of the static magnetic field in paramagnetic spheroids at the laminar structure on the example grain wheat ISEF'2007 International Symposium on Electromagnetic Fields in mechatronics*, electrical and electronic engineering Praga 2007 str. 70–71.
- [3] Cieśla A., Kraszewski W., Skowron M., Syrek P.: *Wykorzystanie silnego pola magnetycznego wzbudzonego przez elektromagnes nadprzewodnikowy do biostymulacji przedświejnej nasion* Agrolaser Lublin 2006, str. 26–33.
- [4] Dudziewicz J.: *Podstawy elektromagnetyzmu*, Warszawa, WNT 1972.
- [5] Griffiths D.J.: *Podstawy elektrodynamiki*, Warszawa PWN 2001.
- [6] Maxwell J. C.: *A Treatise on Electricity and Magnetism*, Clarendon Press, Oxford 1873 ([www.google.books.pl](http://www.google.books.pl)).
- [7] Moon P., Spencer D.E.: *Teoria Pola*, PWN, Warszawa 1966.
- [8] Pietrzyk W.: *Electric field influence on grain Acta Agrophysica* Vol. 5, 1996
- [9] Rawa H.: *Elektryczność i magnetyzm w technice*, Warszawa PWN 1994.
- [10] Rawa H.: *Podstawy elektromagnetyzmu*, Oficyna wydawnicza Politechniki Warszawskiej Warszawa 1996.
- [11] Richards T.C.: *Transversely Magnetized Oblate Spheroids* 2005, Defence R&D Canada – Atlantic.
- [12] Skowron M.: *Rozkład statycznego pola magnetycznego wokół oraz wewnątrz wielowarstwowego elementu paramagnetycznego z wykorzystaniem współrzędnych sferoidy spłaszczonej OWD'2007, IX Międzynarodowe Warsztaty Doktoranckie* Vol. 23, s. 253-258.
- [13] Turowski J.: *Analiza i synteza pól elektromagnetycznych, praca zbiorowa*, Wydawnictwo PAN, Wrocław, 1990.
- [14] Walt H., Emmerich P.: *Chimeric human and mouse spheroids*, Virchows Arch B Cell Pathology Zell-pathologie, Volume 63, Number 1 str. 227 – 230.
- [15] Zahn M.: *Pole elektromagnetyczne*. PWN, Warszawa, 1989.

Dr inż. Mikołaj Skowron  
e-mail: mskowron@agh.edu.pl

Ukończył studia magisterskie w 2004 r. w Akademii Górniczo – Hutniczej na Wydziale Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Elektroniki na kierunku Elektrotechnika o specjalności Elektroenergetyka. W 2011 r. obronił pracę doktorską na tym samym Wydziale. Od września 2011r. jest adiunktem w Katedrze Elektrotechniki i Elektroenergetyki. W pracy naukowej zajmuje się zagadnieniami wpływu pola magnetycznego na organizmy żywe oraz zastosowaniem nadprzewodników.



Artykuł recenzowany