

POLE MAGNETYCZNE SZYNOPRZEWODÓW PROSTOKĄTNYCH O SKOŃCZONEJ DŁUGOŚCI

Tomasz Szczegielniak¹, Zygmunt Piątek¹, Dariusz Kusiak²

¹ Politechnika Częstochowska, Wydział Inżynierii Środowiska i Biotechnologii, ² Politechnika Częstochowska, Wydział Elektryczny

Streszczenie. W artykule przedstawiono nową analityczną metodę obliczania pola magnetycznego układów szyn prostokątnych. Metoda wykorzystuje prawa Biota-Savarta. Zaproponowana metoda pozwala na wyznaczanie rozkładu pola magnetycznego w układach równoległych szynoprzewodów prostokątnych o dowolnych wymiarach w tym szynoprzewodów o skończonej długości. W szczególności wyznaczono pola magnetyczne w nieekranowanych trójfazowych torach wieloprądowych z prostokątnymi szynoprzewodami fazowymi i z szynoprzewodem neutralnym.

Słowa kluczowe: szynoprzewód prostokątny, tor wieloprądowy, pole magnetyczne, metoda analityczna

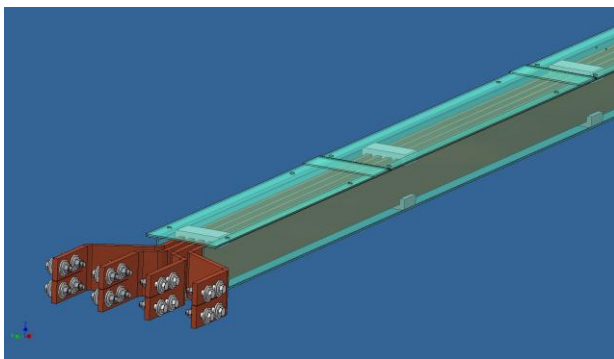
MAGNETIC FIELD IN RECTANGULAR BUS-BARS OF FINITE LENGTH

Abstract. This paper presents a new analytical computation method for determining the magnetic field distributions in high-current busducts of rectangular busbars. This method is based on Biot-Savart law. The proposed method allows us to calculate the magnetic field intensity distribution in a set of parallel rectangular busbars of any dimensions including any length. In particular, the magnetic fields in busbars of unshielded three-phase systems with rectangular phase and neutral busbars, and the use of the method are described.

Keywords: rectangular busbar, high-current bus duct, magnetic field, analytical method

Wstęp

Tory wieloprądowe z miedzianymi lub aluminiumowymi szynoprzewodami prostokątnymi często są stosowane w rozdzielniach i stacjach elektroenergetycznych ze względu na łatwość ich montażu i eksploatacji. Ich prądy znamionowe osiągają wartości do 10 kA, zaś napięcia znamionowe to zazwyczaj 10-30 kV [3, 9]. Typowy tor wieloprądowy z szynoprzewodami prostokątnymi przedstawiono na rysunku 1.



Rys. 1. Trójfazowy tor wieloprądowy z jednym szynoprzewodem prostokątnym na fazę i jednym szynoprzewodem neutralnym (Model EB produkowany przez Holduct Mysłowice)

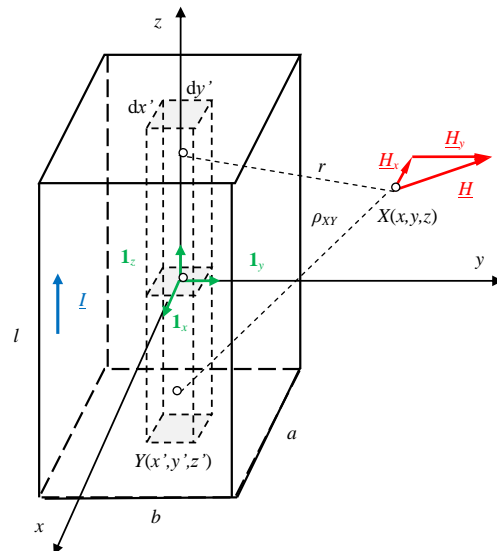
Pole magnetyczne generowane przez prądy w torze wieloprądowym osiąga duże wartości, co może zakłócać pracę sąsiednich urządzeń sterowania i zabezpieczeń jak również niekorzystnie wpływać na zdrowie ludzkie [1, 2, 5, 10]. Stąd też dokładne wyznaczenie pola magnetycznego w otoczeniu takich torów wieloprądowych jest zagadnieniem bardzo ważnym. Rozkład pola magnetycznego o częstotliwości przemysłowej w otoczeniu torów wieloprądowych może być względnie łatwo wyznaczony jedynie dla przypadków szynoprzewodów rurowych [7] oraz szynoprzewodów prostokątnych o dużych długościach w stosunku do ich wymiarów poprzecznych lub w przypadku przewodów taśmowych [4, 11]. Zatem celem niniejszego artykułu jest przedstawienie analitycznej metody wyznaczania pola magnetycznego w otoczeniu szynoprzewodów prostokątnych o dowolnych wymiarach poprzecznych jak również dowolnej długości.

1. Pole magnetyczne szynoprzewodu prostokątnego

Zakładamy, że w przewodzie prostokątnym o wymiarach $a \times b \times l$ (rys. 2) jest stały lub wolnozmienny prąd sinusoidalny

o zespolonej wartości skutecznej \underline{I} . Wtedy w każdym punkcie przewodu gęstość prądu jest stała i określona jest wzorem

$$\underline{J} = \frac{\underline{I}}{ab} \quad (1)$$



Rys. 2. Szynoprzewód prostokątny o skończonej długości

Prąd w obszarze elementarnym $ds = dx' dy'$ wyraża się wzorem

$$d\underline{I} = \underline{J} ds = \frac{\underline{I}}{ab} dx' dy' \quad (2)$$

a elementarny wektor pola magnetycznego generowany przez ten prąd opisany jest wzorem [8]

$$d\underline{H} = \frac{d\underline{I}}{2\pi r} \mathbf{1}_z \times \mathbf{1}_r = d\underline{H}_x \mathbf{1}_x + d\underline{H}_y \mathbf{1}_y \quad (3)$$

Moduł wektora elementarnego możemy zapisać w postaci wzoru

$$d\underline{H} = \frac{d\underline{I}}{4\pi r} (\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2) = \frac{\underline{I}}{4\pi ab} \frac{dx' dy'}{r} (\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2) \quad (4)$$

gdzie $\cos\alpha_1 = \frac{\frac{l}{2} + z}{\sqrt{r^2 + \left(z + \frac{l}{2}\right)^2}}$, $\cos\alpha_2 = \frac{\frac{l}{2} - z}{\sqrt{r^2 + \left(z - \frac{l}{2}\right)^2}}$ oraz

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}.$$

Wtedy też składowe natężenia elementarnego pola magnetycznego przedstawiamy za pomocą następujących wzorów:

$$\begin{aligned} d\mathbf{H}_x &= -d\mathbf{H} \cos\theta = -d\mathbf{H} \frac{y-y'}{r} = \\ &= -\frac{I}{4\pi ab} \frac{y-y'}{r^2} \left[\frac{\frac{l}{2}+z}{\sqrt{r^2+\left(z+\frac{l}{2}\right)^2}} + \frac{\frac{l}{2}-z}{\sqrt{r^2+\left(z-\frac{l}{2}\right)^2}} \right] dx' dy' \end{aligned} \quad (5a)$$

oraz

$$\begin{aligned} d\mathbf{H}_y &= d\mathbf{H} \sin\theta = d\mathbf{H} \frac{x-x'}{r} = \\ &= \frac{I}{4\pi ab} \frac{x-x'}{r^2} \left[\frac{\frac{l}{2}+z}{\sqrt{r^2+\left(z+\frac{l}{2}\right)^2}} + \frac{\frac{l}{2}-z}{\sqrt{r^2+\left(z-\frac{l}{2}\right)^2}} \right] dx' dy' \end{aligned} \quad (5b)$$

zaś długość wektora elementarnego pola wypadkowego

$$d\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi ab} \frac{1}{r} \left[\frac{\frac{l}{2}+z}{\sqrt{r^2+\left(z+\frac{l}{2}\right)^2}} + \frac{\frac{l}{2}-z}{\sqrt{r^2+\left(z-\frac{l}{2}\right)^2}} \right] dx' dy' \quad (6)$$

Wobec powyższego składowe \mathbf{H}_x i \mathbf{H}_y całkowitego wektora natężenia pola magnetycznego $\mathbf{H} = \mathbf{H}_x \mathbf{1}_x + \mathbf{H}_y \mathbf{1}_y$ wyznaczmy poprzez następujące całkowania:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_x(x, y) &= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} d\mathbf{H}_x dx' dy' = \\ &= -\frac{I}{4\pi ab} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{y-y'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} (\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2) dx' dy' \end{aligned} \quad (7a)$$

oraz

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_y(x, y) &= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} d\mathbf{H}_y dx' dy' = \\ &= \frac{I}{4\pi ab} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} (\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2) dx' dy' \end{aligned} \quad (7b)$$

zaś moduł pola magnetycznego wypadkowego

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(x, y) &= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} d\mathbf{H} dx' dy' = \\ &= \frac{I}{4\pi ab} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}} (\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2) dx' dy' \end{aligned} \quad (8)$$

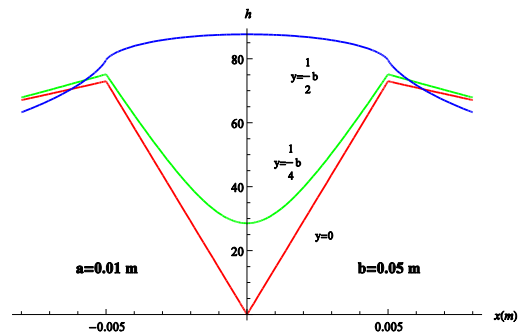
W obszarze zewnętrznym przewodu, tzn. dla $x > \frac{a}{2} \cup x < -\frac{a}{2} \cup y > \frac{b}{2} \cup y < -\frac{b}{2}$, punkt obserwacji $X(x, y, z)$ nigdy nie pokryje się z punktem źródłowym $Y(x', y', z')$ i powyższe całki są całkami właściwymi. W obszarze wewnętrznym przewodu, tzn. dla $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \cap -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}$, punkt obserwacji $X(x, y, z)$ może pokryć się z punktem

źródłowym $Y(x', y', z')$ i powyższe całki są całkami niewłaściwymi ale zbieżnymi. Problem zbieżności tych całek pojawia się w drugim całkowaniu. W rozwiązaniu otrzymujemy analityczne wzory na składowe natężenia pola magnetycznego wzdłuż osi Ox oraz wzdłuż osi Oy . Wzory te określają zespolone składowe natężenia pola magnetycznego w dowolnym punkcie $X(x, y, z)$ wewnątrz i na zewnątrz prostokątnego przewodu szynowego o skończonej długości. Moduł całkowitego pola magnetycznego wyznaczamy ze wzoru

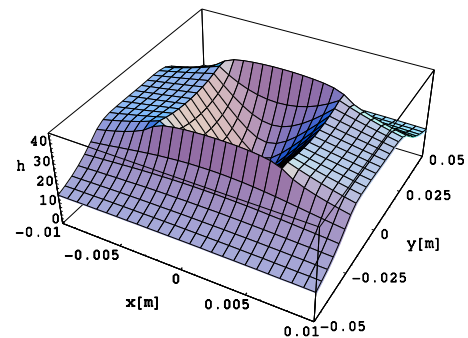
$$H(x, y, z) = \sqrt{H_x^2(x, y, z) + H_y^2(x, y, z)} \quad (9)$$

Rozkład modułu pola magnetycznego szynoprzewodu prostokątnego o skończonej długości na płaszczyźnie xOy przedstawiamy na rysunku 3, przy czym pole to jest wyrażone w jednostkach względnych jako funkcja dana wzorem

$h(x, y, z) = \frac{H(x, y, z)}{H_0}$, gdzie natężenia odniesienia $H_0 = \frac{I}{2(a+b)}$. Rozkład przestrzenny natężenia pola magnetycznego ilustruje rysunek 4.



Rys. 3. Rozkład pola $H(x, y, z)$ na płaszczyźnie xOy



Rys. 4. Rozkład przestrzenny pola $H(x, y, z)$ na płaszczyźnie $z=l/2$ dla $l=1$ m, $a=0,01$ m, $b=0,05$ m

2. Pole magnetyczne jednofazowego toru wielkopiętrowego

Zakładamy, że w linii o przewodach prostokątnych o wymiarach $a \times b$, długości l i odległości d między nimi (rys. 5) jest stały lub wolnozmienny prąd sinusoidalny o zespolonej wartościach skutecznych $\underline{I}_1 = \underline{I}$ oraz $\underline{I}_2 = -\underline{I}$.

Całkowite pole elementarne w punkcie $X(x, y, z)$ generowane przez prądy w obszarach elementarnych pierwszego i drugiego przewodu dane jest wzorem

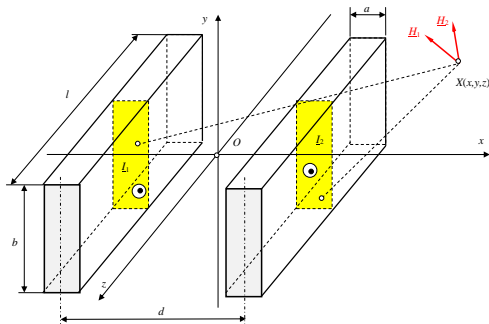
$$d\mathbf{H} = d\mathbf{H}_1 + d\mathbf{H}_2 \quad (10)$$

zaś pole magnetyczne całkowite w tym punkcie opisuje wzór

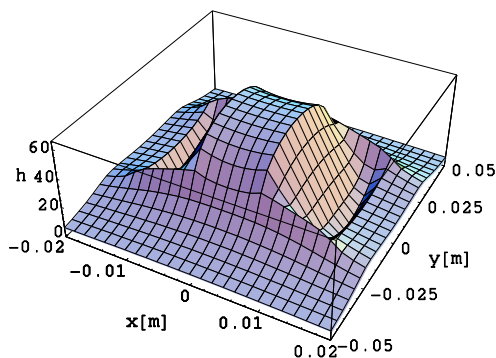
$$\mathbf{H} = (\mathbf{H}_{x1} + \mathbf{H}_{x2}) \mathbf{1}_x + (\mathbf{H}_{y1} + \mathbf{H}_{y2}) \mathbf{1}_y = \mathbf{H}_x \mathbf{1}_x + \mathbf{H}_y \mathbf{1}_y \quad (11)$$

We wzorze (11) składowe \mathbf{H}_{x1} i \mathbf{H}_{y1} dotyczą pola magnetycznego wytworzonego przez prąd \underline{I}_1 . Składowe \mathbf{H}_{x2} i \mathbf{H}_{y2}

dotyczą pola magnetycznego wytworzonego przez prąd \underline{I}_2 . Rozkład modułu całkowitego pola magnetycznego, w jednostkach względnych, na płaszczyźnie xOy przedstawiamy na rysunku 6.



Rys. 5. Jednofazowy tor wieloprzewodowy o skończonej długości



Rys. 6. Rozkład przestrzenny pola $H(x,y,z)$ jednofazowego toru wieloprzewodowego na płaszczyźnie $z=l/2$ dla $l=1\text{m}$, $a=0,01\text{m}$, $b=0,05\text{m}$, $d=2a$

3. Pole magnetyczne trójfazowego trójprzewodowego toru wieloprzewodowego

Zakładamy, że w trzyprzewodowej linii trójfazowej o przewodach prostokątnych o wymiarach $a \times b \times l$ (rys. 7) i odległości d między nimi jest stały lub wolnozmienny trójfazowy prąd sinusoidalny o zespolonej wartościach skutecznych \underline{I}_1 , \underline{I}_2 oraz \underline{I}_3 . Całkowne pole elementarne w punkcie $X(x,y,z)$ generowane przez prądy w obszarach elementarnych pierwszego, drugiego i trzeciego przewodu określone jest wzorem

$$d\underline{H} = d\underline{H}_1 + d\underline{H}_2 + d\underline{H}_3 \quad (12)$$

zaś pole magnetyczne całkowite w tym punkcie wyraża się wzorem

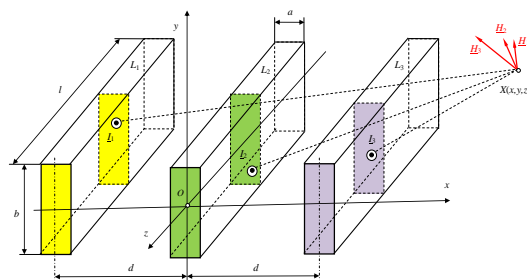
$$\underline{H} = (\underline{H}_{x1} + \underline{H}_{x2} + \underline{H}_{x3})\mathbf{1}_x + (\underline{H}_{y1} + \underline{H}_{y2} + \underline{H}_{y3})\mathbf{1}_y = \underline{H}_x \mathbf{1}_x + \underline{H}_y \mathbf{1}_y \quad (13)$$

W powyższym wzorze składowe \underline{H}_{x1} i \underline{H}_{y1} wyrażają się odpowiednio wzorami analitycznymi otrzymanymi z (7a) i (7b) po podstawieniu w nich $x+d$ za zmienną x oraz przyjmując prąd $\underline{I} = \underline{I}_1$, składowe \underline{H}_{x2} i \underline{H}_{y2} wyrażają się odpowiednio tymi samymi wzorami przyjmując w nich prąd $\underline{I} = \underline{I}_2$, a składowe \underline{H}_{x3} i \underline{H}_{y3} wyrażają się odpowiednio tymi samymi wzorami po podstawieniu w nich $x-d$ za zmienną x i po przyjęciu $\underline{I} = \underline{I}_3$.

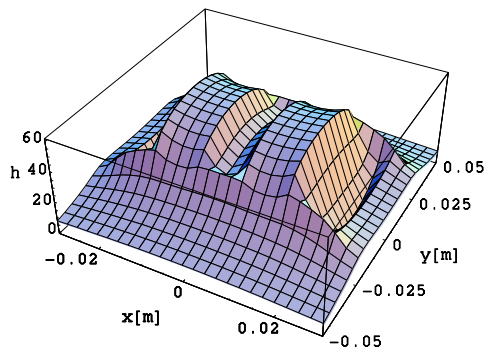
Rozkład modułu całkowitego pola magnetycznego, w jednostkach względnych, na płaszczyźnie xOy linii trójfazowej trójprzewodowej dla przypadku prądów symetrycznych w szynoprzewodach, czyli dla $\underline{I}_1 = \underline{I} e^{j0^\circ}$, $\underline{I}_2 = \underline{I} e^{-j120^\circ}$ oraz $\underline{I}_3 = \underline{I} e^{j120^\circ}$, przedstawiamy na rysunku 8.

Niesymetria prądowa zmienia rozkład pola magnetycznego w otoczeniu rozpatrywanego toru. Dla przykładu przyjęto następujące prądy fazowe: $\underline{I}_1 = \underline{I} e^{j0^\circ}$, $\underline{I}_2 = 0,5 \underline{I} e^{j120^\circ}$ i wtedy

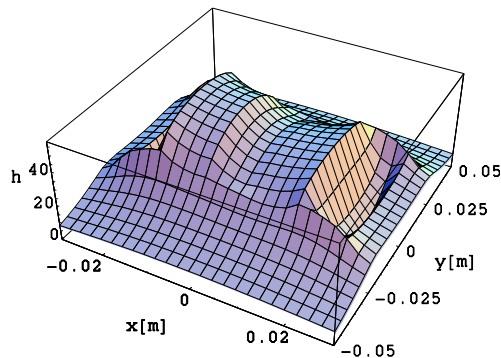
$\underline{I}_3 = -\underline{I}_1 - \underline{I}_2 = 0,866 \underline{I} e^{j150^\circ}$. Rozkłady pola dla tego przypadku przedstawiono na rysunku 9.



Rys. 7. Trójfazowy trójprzewodowy tor wieloprzewodowy o skończonej długości



Rys. 8. Rozkład przestrzenny pola $H(x,y,z)$ trójfazowego trójprzewodowego toru wieloprzewodowego przy symetrii prądowej na płaszczyźnie $z=l/2$ dla $l=1\text{m}$, $a=0,01\text{m}$, $b=0,05\text{m}$, $d=2a$



Rys. 9. Rozkład przestrzenny pola $H(x,y,z)$ trójfazowego trójprzewodowego toru wieloprzewodowego przy asymetrii prądowej na płaszczyźnie $z=l/2$ dla $l=1\text{m}$, $a=0,01\text{m}$, $b=0,05\text{m}$, $d=2a$

4. Pole magnetyczne trójfazowego czteroprzewodowego toru wieloprzewodowego

Rozpatrzmy czteroprzewodowy tor wieloprzewodowy o szynoprzewodach prostokątnych (rys. 10) i asymetrii prądowej:

$\underline{I}_1 = \underline{I} e^{j0^\circ}$, $\underline{I}_2 = 0,5 \underline{I} e^{-j120^\circ}$, $\underline{I}_3 = \underline{I} e^{j120^\circ}$ i prądem w szynie neutralnej $\underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0,866 \underline{I} e^{j150^\circ}$.

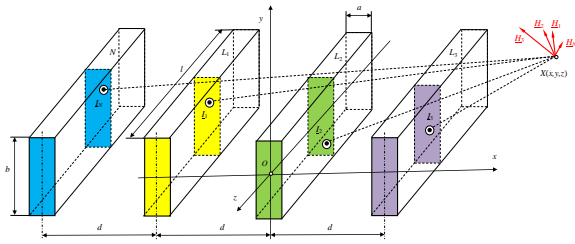
Wtedy całkowite pole elementarne w punkcie $X(x,y)$ generowane przez prądy w obszarach elementarnych przewodów fazowych i przewodu neutralnego

$$d\underline{H} = d\underline{H}_1 + d\underline{H}_2 + d\underline{H}_3 + d\underline{H}_N \quad (14)$$

zaś całkowite pole magnetyczne w tym punkcie

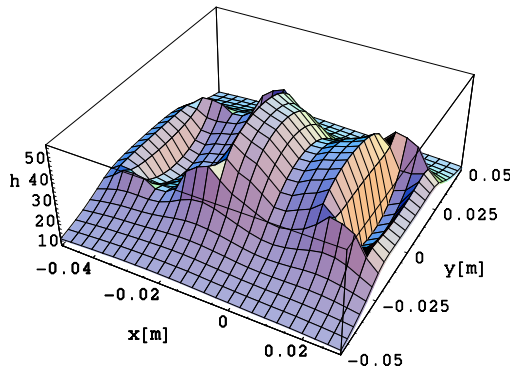
$$\underline{H} = (\underline{H}_{x1} + \underline{H}_{x2} + \underline{H}_{x3} + \underline{H}_{xN})\mathbf{1}_x + (\underline{H}_{y1} + \underline{H}_{y2} + \underline{H}_{y3} + \underline{H}_{yN})\mathbf{1}_y = \underline{H}_x \mathbf{1}_x + \underline{H}_y \mathbf{1}_y \quad (15)$$

gdzie składowe \underline{H}_{x1} i \underline{H}_{y1} , \underline{H}_{x2} i \underline{H}_{y2} oraz \underline{H}_{x3} i \underline{H}_{y3} wyrażają się odpowiednio wzorami zastosowanymi dla trójfazowego układu trójprzewodowego.



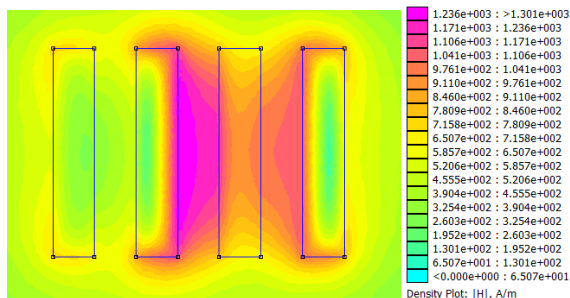
Rys. 10. Trójfazowy czteroprzewodowy tor wieloprzewodowy o skończonej długości

Składowe \underline{H}_{xN} i \underline{H}_{yN} wyrażają się odpowiednio wzorami otrzymanymi z (7a) i (7b) po podstawieniu w nich $x + 2d$ za zmienną x oraz przyjmując prąd $\underline{I}_N = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$. Rozkłady pola magnetycznego w takim torze prądowym dla przypadku asymetrii prądowej przedstawiamy na rysunku 11.



Rys. 11. Rozkład przestrzenny pola $H(x, y, z)$ trójfazowego czteroprzewodowego toru wieloprzewodowego przy asymetrii prądowej na płaszczyźnie $z=l/2$ dla $l=1m$, $a=0,01m$, $b=0,05m$, $d=2a$

W celu weryfikacji otrzymanych wyników przeprowadzono symulację korzystając z programu FEMM [6] opartego na metodzie elementów skończonych. Na rysunku 12 przedstawiono rozkład amplitudy pola magnetycznego przy asymetrii prądowej $\underline{I}_1 = 100e^{j0^\circ}$, $\underline{I}_2 = 50e^{-j120^\circ}$, $\underline{I}_3 = 100e^{j120^\circ}$.



Rys. 12. Rozkład pola magnetycznego przy asymetrii prądowej oraz dla $l=1m$, $a=0,01m$, $b=0,05m$, $d=2a$

5. Wnioski

Wyprowadzone wzory umożliwiają obliczanie natężenia pola magnetycznego wytworzone przez prądy szynoprzewodów prostokątnych w dowolnym punkcie przestrzeni w tym również w obszarach własnych szynoprzewodów.

Uwzględniając one skończone wymiary poprzeczne i skończoną długość szynoprzewodów. Mogą być stosowane dla dowolnych wartości prądów zespolonych, w szczególności dla przypadków trójfazowych torów wieloprzewodowych z asymetriami prądowymi.

Ponad to z tych wzorów można otrzymać analityczny opis pola magnetycznego dla długich szynoprzewodów jak również dla przewodów taśmowych.

W przypadku uwzględnienia wpływu zjawisk naskórkowości i zbliżenia na pole magnetyczne torów wieloprzewodowych z szynoprzewodami prostokątnymi, wyprowadzone wzory mogą być użyte do opisu pola magnetycznego generowanego przez prądy w tzw. prostokątnych obszarach elementarnych, na które zostają podzielone szynoprzewody badanego toru.

Literatura

- [1] Bottausio O. et al.: Numerical and experimental evaluation of magnetic field generated by power busbar systems. IEE Proc.-Gener. Transm. Distrib., Vol. 143, No. 5, 1996, pp. 455-460.
- [2] Cucu M. and Popescu M.O.: Magnetic field in encapsulated bus-bar. U.P.B. Sci. Bull., Series C, Vol. 73, Iss. 1, 2011, pp. 129-142.
- [3] Ducluzaux A.: Extra losses caused in high current conductors by skin and proximity effects. Schneider Electric "Cahier Technique" no. 83, 1983.
- [4] Kazimierzczuk M. K.: High-frequency magnetic components. J. Wiley & Sons, Chichester, 2009.
- [5] Keiko T. et al.: Calculation of magnetic fields of the bus bar. UPEC'95, Vol. 2, 1995, pp. 554-557.
- [6] Meeker, D.C., Finite Element Method Magnetics, version 4.2 (11apr2012, Mathematica Build), <http://www.femm.info>.
- [7] Piątek Z.: Impedances of tubular high current busducts. Polish Academy of Sciences, Warsaw 2008.
- [8] Piątek Z., Jabłoński P.: Podstawy teorii pola elektromagnetycznego. WNT, Warszawa 2010.
- [9] Sarajčev P., Goić R.: Power loss computation in high-current generator bus ducts of rectangular cross-section. Electric Power Components and Systems, No. 39, 2010, pp. 1469-1485.
- [10] Sha X., et al.: Analysis of 3-D electromagnetic field for three-phase low voltage and heavy current busbar bridge system. Inter. J. of App. Electromagn. and Mechanics, No.26, 2007, pp. 37-49.
- [11] Zhou J., Lewis A.M.: Thin-skin electromagnetic fields around a rectangular conductor bar. J. Phys. D: Appl. Phys., No. 27, 1994, pp. 419-425.

Dr inż. Tomasz Szczegielniak
e-mail: szczegielniak@interia.pl

Stopień doktora otrzymał w 2011 roku na Wydziale Elektrycznym Politechniki Śląskiej. Obecnie pracuje jako adiunkt w Zakładzie Elektrotechniki i Automatyki w Inżynierii Środowiska Politechniki Częstochowskiej. Jego badania skupiają się na modelowaniu zjawisk elektromagnetycznych w torach wieloprzewodowych.



Prof. dr hab. inż. Zygmunt Piątek
e-mail: zygmunt.piatek@interia.pl

Jest pracownikiem naukowo-dydaktycznym w Instytucie Inżynierii Środowiska Politechniki Częstochowskiej. Jego zainteresowania naukowe to: zagadnienia pola elektromagnetycznego występujące w napowietrznych i kablowych liniach przesyłowych, torach wieloprzewodowych, szynoprzewodach oraz grzejnictwie indukcyjnym.



Dr inż. Dariusz Kusiak
e-mail: dariuszkusiak@wp.pl

Stopień doktora uzyskał w 2008 roku na Wydziale Elektrycznym Politechniki Częstochowskiej. Obecnie pracuje jako adiunkt w Instytucie Elektrotechniki Przemysłowej na Wydziale Elektrycznym Politechniki Częstochowskiej. Jego zainteresowania naukowe to: zagadnienia pola elektromagnetycznego występujące w torach wieloprzewodowych oraz szynoprzewodach.



otrzymano/received: 06.06.2013

przyjęto do druku/accepted: 28.10.2013