

Submitted: 2016.11.11

Accepted: 2016.12.16

Published: 2016.12.26

NUMERICAL-RESEARCH ANALYSIS OF THE WORK OF COMPRESSED COMPOSITE THIN-WALLED ELEMENTS

Patryk Różyło¹, Paweł Wysmulski², Katarzyna Falkowicz³

¹ Mechanical Engineering Faculty, Lublin University of Technology, Nadbystrzycka St 36, 20-618 Lublin, Poland, email: p.rozylo@pollub.pl

² Mechanical Engineering Faculty, Lublin University of Technology, Nadbystrzycka St 36, 20-618 Lublin, Poland, email: p.wysmulski@pollub.pl

³ Mechanical Engineering Faculty, Lublin University of Technology, Nadbystrzycka St 36, 20-618 Lublin, Poland, email: k.falkowicz@pollub.pl

ABSTRACT

Thin-walled, composite elements subjected to axial compression were the subject of conducted research. The samples were articulately propped against the edges of their cross section. The scope of the research included a numerical analysis and experimental verification of both critical and weakly postcritical states. Numerical investigations were carried out in the elastic field, allowing for steady work of thin-walled structures until they reached the point of stability loss, with the simultaneous determination of critical forces values. For numerical calculations software ABAQUS® was used. The main issue of the research was to determine a convergence of the results obtained by numerical and experimental examination, in the range of operational allowable loads.

KEYWORDS: FEM, thin-walled elements, stability of thin-walled structures, composites, experimental investigations.

NUMERYCZNO-DOŚWIADCZALNA ANALIZA PRACY ŚCISKANYCH ELEMENTÓW KOMPOZYTOWYCH

STRESZCZENIE

Przedmiot badań stanowiły cienkościenne elementy kompozytowe poddane procesowi osiowego ściskania. Próbkę zamocowano przegubowo na krawędziach stanowiących ich przekrój poprzeczny. Zakres badań obejmował analizę numeryczną oraz weryfikację doświadczalną stanu krytycznego oraz słabo pokrytycznego. Badania numeryczne realizowano w zakresie sprężystym, pozwalającym na stateczną pracę cienkościennych konstrukcji do momentu osiągnięcia wyraźnej utraty stateczności, przy jednoczesnym wyznaczeniu wartości sił krytycznych. Do obliczeń numerycznych wykorzystano oprogramowanie ABAQUS®. Kluczowym aspektem badawczym było wyznaczenie poziomu zbieżności wyników uzyskanych drogą numeryczną oraz eksperymentalną, w zakresie dopuszczalnych obciążeń eksploatacyjnych.

SŁOWA KLUCZOWE: MES, element cienkościenne, stateczność cienkościennych struktur, kompozyty, badania eksperymentalne.

1. Wstęp

Intensywny rozwój przemysłu wymaga od konstruktorów stosowania nowoczesnych materiałów posiadających korzystniejsze właściwości eksploatacyjne. Dąży się do redukcji masy elementów przy jednoczesnym zachowaniu lub zwiększeniu ich właściwości wytrzymałościowych i sztywnościowych. Grupę ustrojów nośnych charakteryzujących się powyższymi cechami stanowią konstrukcje cienkościenne. Ustroje tego typu cechują się dodatkowo wadą powszechnie określaną,

jako utrata stateczności. Pomimo występowania zjawiska wybożenia zachodzi możliwość pracy struktury nawet po jego osiągnięciu. Osiągnięcie powyższego zjawiska związane jest ze zmianą liniowego stanu pracy struktur na nieliniowy. W pracy przeanalizowano stateczny stan pracy konstrukcji poddanych obciążeniu ściskającemu. Analizami zagadnienia stateczności konstrukcji cienkościennych w warunkach eksploatacyjnych obciążeń statycznych zajęto się m.in. w pracach [2,9-14,17-18,23-28,32-33].

Literatura dotycząca cienkościennych kompozytowych konstrukcji nośnych jest ograniczona, dominują prace o charakterze teoretycznym i numerycznym, bardzo mało jest prezentacji wyników badań doświadczalnych. W pracy zajęto się słupami kompozytowymi o powszechnie występujących profilach przekroju poprzecznego. Analizie poddano dwa wybrane ustroje o przekroju ceowym i omegowym, które poddano osiowemu obciążeniu ściskającemu. Badania obejmowały stan krytyczny i słabo pokrytyczny celem wyznaczenia wartości sił, dla których struktura doznaje utraty stateczności. Istnieje wiele publikacji poświęconych badaniu stanu krytycznego, cienkościennych ustrojów kompozytowych, w aspekcie stateczności konstrukcji [4-9,19-20,25-26,30,33].

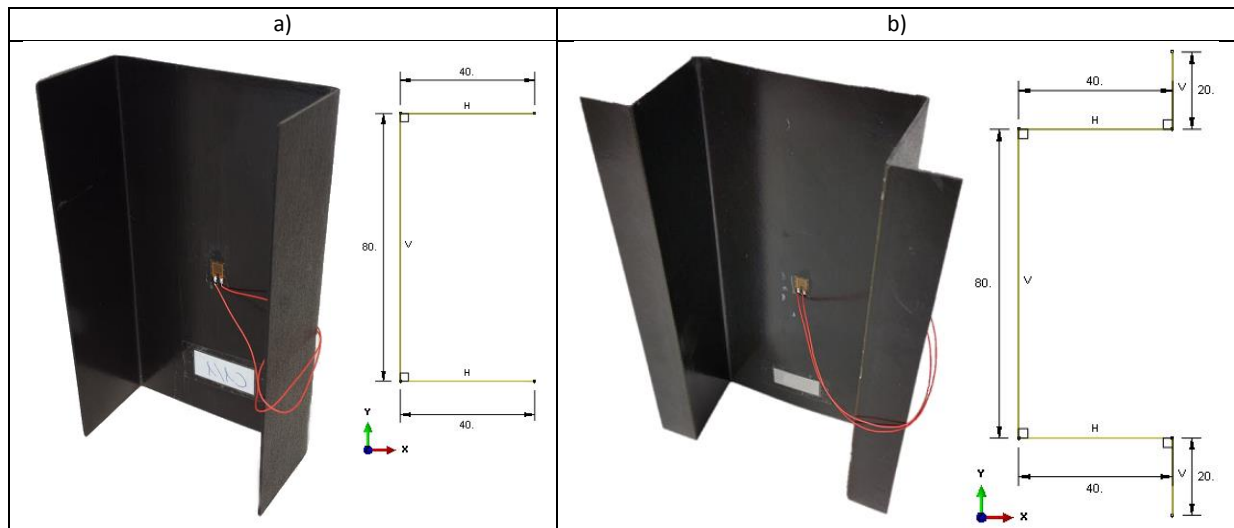
Praca skupia się na analizie porównawczej charakterystyk zachowania badanych struktur na drodze numerycznej oraz eksperymentalnej. W ramach tego odpowiednio odwzorowano rzeczywiste warunki brzegowe słupów adekwatne do idealnego założenia modelu MES. Kluczowym aspektem było wyznaczenie wartości sił krytycznych, do których wyznaczenia niezbędna jest znajomość wybranych metod aproksymacyjnych. Powszechnie znanych jest wiele metod aproksymacyjnych, umożliwiających oszacowanie przybliżonej wartości obciążenia krytycznego, poczynając od najstarszych: metoda Southwella [21], Tereszowskiego [29], aż po bardziej aktualne jak metoda przecięcia prostych [20-34], stycznej pionowej [20,34], punktu przegięcia [20,34] $P-w_c^2$ oraz $P-w_c^3$ [20,34] a także metoda Koiter'a [20,31]. W przypadku analizy numerycznej konieczne było zastosowanie liniowego zagadnienia własnego, uwzględniającego kryterium minimum energii potencjalnej całego układu, celem wyznaczenia obciążenia krytycznego, natomiast w odniesieniu do przeprowadzonych badań eksperymentalnych, niezbędne było zastosowanie wybranych metod aproksymacyjnych. Finalnym etapem pracy, było określenie zbieżności otrzymanych wyników, w postaci charakterystyk stanu ugięcia od obciążenia w zakresie krytycznym. Głównym celem pracy było wyznaczenie poziomu zgodności analizowanego procesu na drodze numerycznej oraz doświadczalnej.

2. Przedmiot i metodologia badań

Przedmiotem badań były cienkościennie profile kompozytowe o zróżnicowanych kształtach przekroju poprzecznego oraz długościach. Analizowane struktury charakteryzowały się cechami mechanicznymi zgodnymi z parametrami materiałowymi kompozytu węglowego M12/35%/UD134/AS7. Ustroje cienkościennie były wykonane z jednokierunkowej taśmy systemu HexPly kompozytu węglowo epoksydowego. Właściwości mechaniczne kompozytu to w głównej mierze: Moduł Young'a w kierunku włókien wynoszący 130710 MPa, w kierunku prostopadłym do włókien 6360 MPa, współczynnik Poissona równy 0,32, wytrzymałość na ścinanie 100,15 MPa, moduł Kirchhoffa 4180 MPa oraz wytrzymałość na ściskanie w kierunku włókien 1531 MPa i prostopadle do włókien 214 MPa [4]. Wyznaczone drogą eksperymentalną parametry mechaniczne kompozytu, pozwoliły na możliwość dalszego definiowania modelu w odniesieniu do obliczeń numerycznych. Ustroje tego typu są powszechnie stosowane w przemyśle lotniczym, jako wzmocnienia poszycia kadłuba samolotów pasażerskich. Zastosowanie profili o wybranej geometrii pozwala na skuteczne zmniejszenie masy konstrukcji przy jednoczesnym jej wzmocnieniu, takie rozwiązanie umożliwia redukcję naprężeń pochodzących od sił wzdłużnych podczas pracy całej konstrukcji.

W pracy poddano analizie dwa zróżnicowane typy profili wykonane z tego samego materiału kompozytowego. Badania doświadczalne i numeryczne dotyczyły ustroi o otwartych przekrojach

poprzecznych. Profile o wysokim poziomie sztywności to struktury ceowe i omegowe. Analiza dotyczyła dwóch typów struktur, z których pierwszą stanowił słup ceowy, natomiast drugą profil omegowy posiadający dodatkowe dwie krawędzie przekroju poprzecznego, które w znaczny sposób go usztywniają. Wybrane profile kompozytowe istotnie wpływają pod względem eksploatacyjnym na zwiększenie trwałości oraz wytrzymałości konstrukcji na wszelkie obciążenia ściskające. Rzeczywiste struktury oraz szkice przekrojów poprzecznych słupów poddanych badaniom, przedstawiono na poniższych rysunkach.

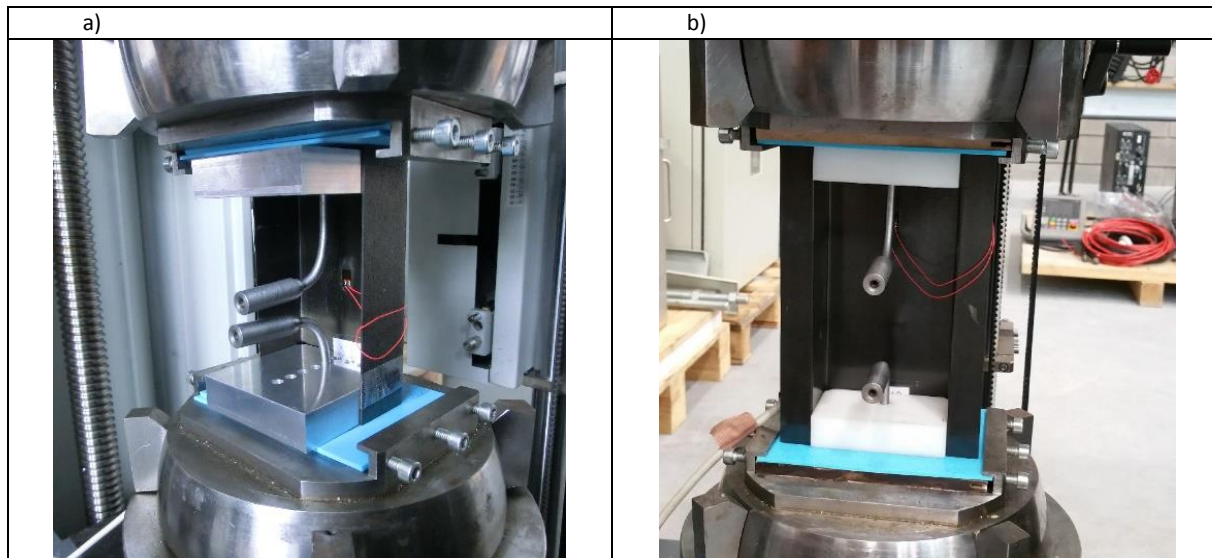


Rys. 1. Model rzeczywisty z parametrami przekroju poprzecznego:

a) próbka ceowa, b) próbka omegowa, wymiary w mm

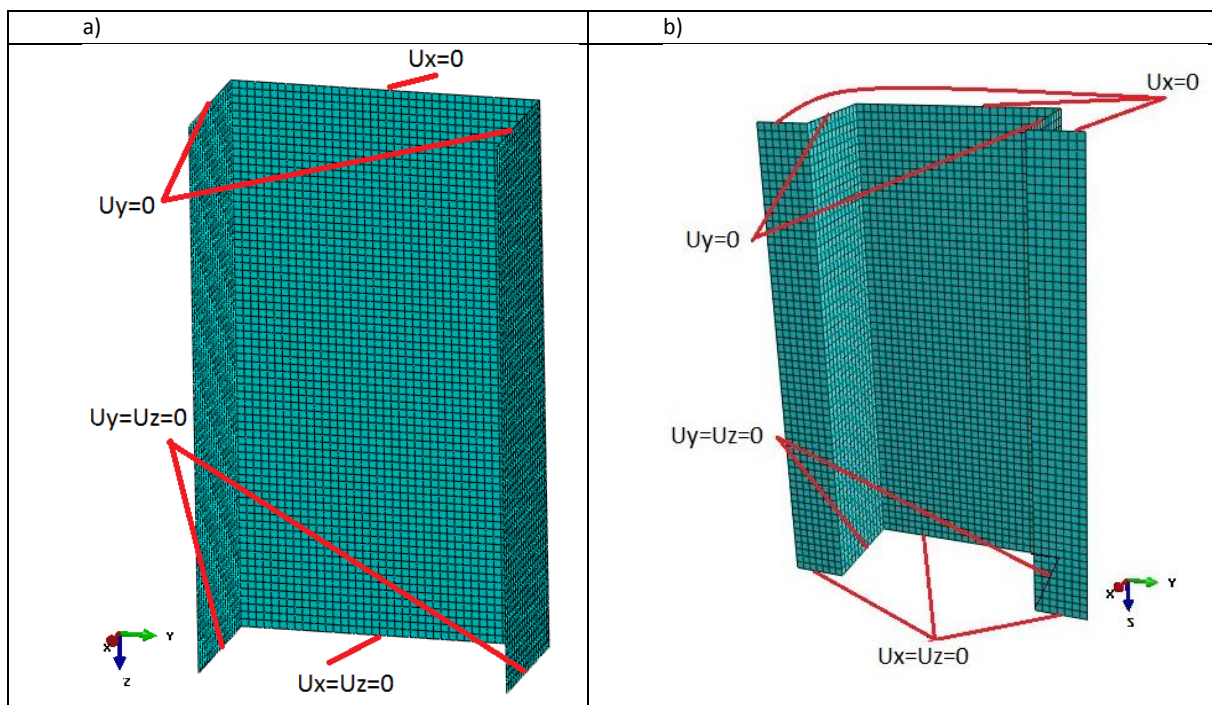
Profile cienkościenne charakteryzowały się zróżnicowanymi konfiguracjami ułożenia warstw kompozytu. Grubość pojedynczej warstwy w obydwu strukturach była jednakowa i wynosiła 0,131 mm. Kompozyt składał się z 8 warstw o zróżnicowanej konfiguracji ułożenia włókien laminatu względem płaszczyzny środkowej. W odniesieniu do profilu omegowego zastosowano konfigurację ułożenia warstw $[90/-45/45/0]_s$. Słup ceowy charakteryzował się konfiguracją warstw laminatu $[0/-45/45/90]_s$.

Próbki badawcze posiadały określone parametry geometryczne przekroju poprzecznego, które przedstawione zostały na rysunku 1, natomiast wysokość słupa omegowego wynosiła 180 mm, przy czym słupa ceowego 143 mm. Wykonano również tożsame modele MES dla każdego z badanych przypadków, które w pełni odwzorowane zostały numerycznie w systemie Abaqus, celem możliwości realizacji badania w oparciu o metodę elementów skończonych. Analiza stanu krytycznego i słabo pokrytycznego została przeprowadzona na maszynie wytrzymałościowej Zwick Z100 o sile maksymalnej 100kN w temperaturze pokojowej, przy stałej prędkości trawersy górnej, wynoszącej 2 mm/min. Precyzyjne odwzorowanie rzeczywistych warunków brzegowych, zgodnych jednocześnie z idealnym założeniem MES, było związane z klasycznym podparciem przegubowym. O dokładności warunków brzegowych zrealizowanych w ramach eksperymentów badawczych decydowało zastosowanie odpowiednich głowic, o płaskich powierzchniach roboczych, wraz z zastosowaniem podkładów panelowych oraz podkładów z tworzyw sztucznych, wpływających bezpośrednio na poprawne ułożenie się przekrojów końcowych profili, podczas procesu ściskania. Realizacja zastosowanych warunków brzegowych w odniesieniu do analizy doświadczalnej została przedstawiona na poniższym rysunku.



Rys. 2. Doświadczalne warunki brzegowe: a) próbka ceowa, b) próbka omegowa

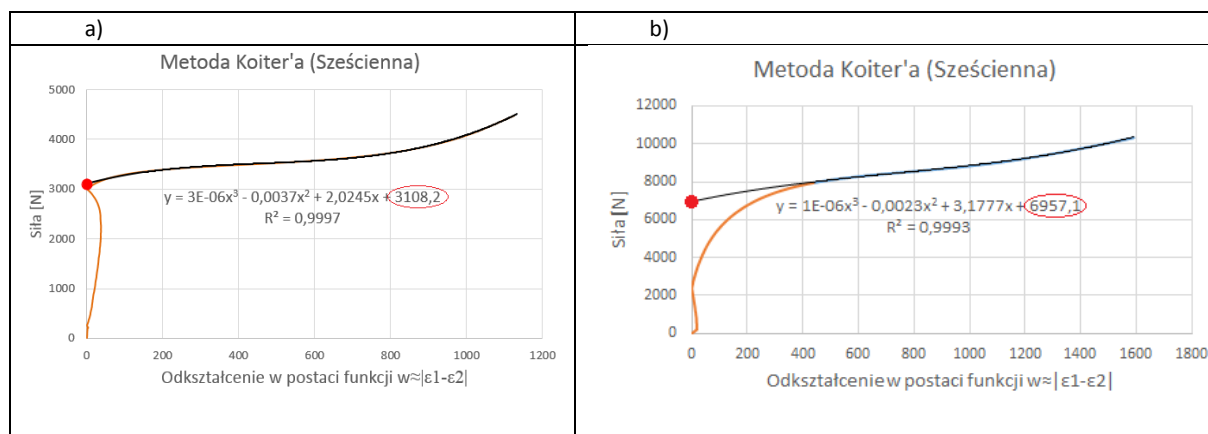
Pełne odwzorowanie warunku brzegowego w analizie MES było możliwe wyłącznie dzięki przypisaniu obciążenia ściskającego przyłożonego równomierne do górnych krawędzi przekroju poprzecznego oraz zablokowaniu stopni swobody, adekwatnych do stanu rzeczywistego. Kluczowym zabiegiem w badaniu numerycznym było przeprowadzenie poprawnej dyskretyzacji modelu. Model powłokowy charakteryzował się typem elementu skończonego oznaczonego, jako S8R – element powłokowy o kwadratowej funkcji kształtu ze zredukowanym całkowaniem. Technika zredukowanego całkowania jest jedną z najstarszych technik aproksymacji rozwiązań stanu przemieszczeniowo-naprężeniowego w elemencie. Zredukowane całkowanie pozwala na usuwanie fałszywych form deformacji elementów skończonych dzięki zastosowaniu wielomianów wyższych rzędów w opisie funkcji elementu [[35]]. W przypadku profilu omegowego przypisano około 4000 elementów siatki, w elemencie ceowym liczba sięgała rzędu 5700. Poniżej ukazano modele numeryczne po dyskretyzacji z warunkami brzegowymi.



Rys. 3. Model numeryczny: a) profil ceowy, b) profil omegowy

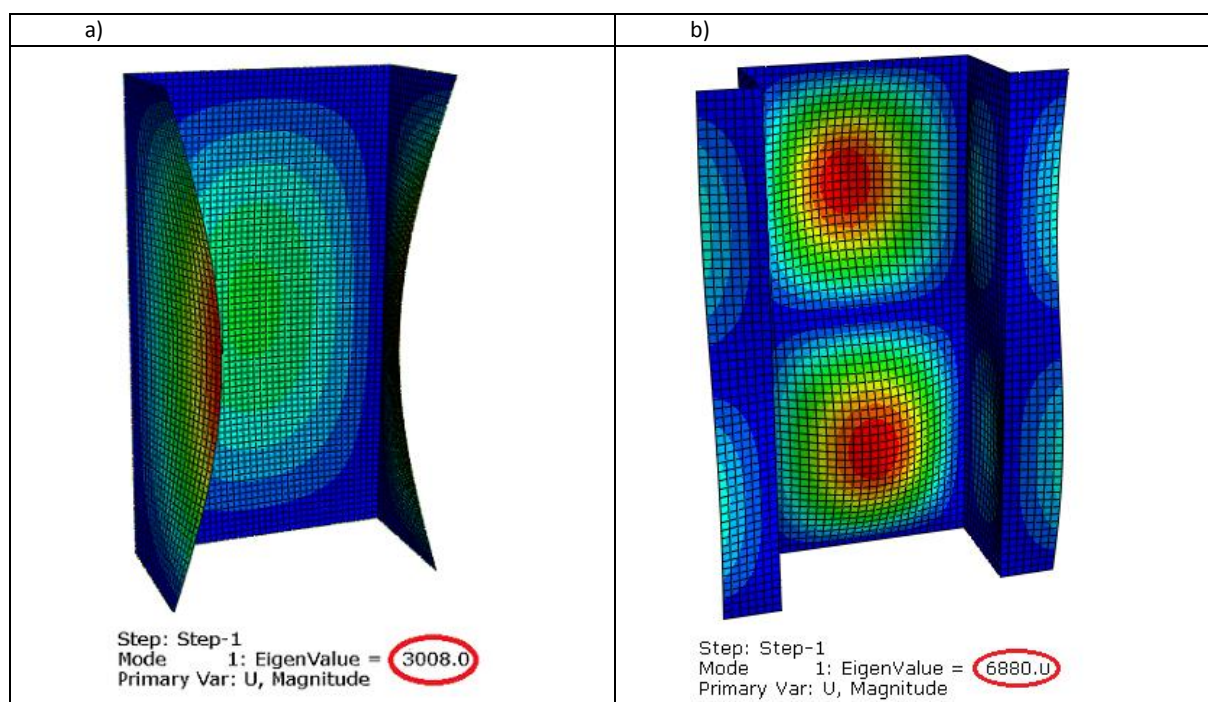
3. Wyniki

W ramach przeprowadzonych badań doświadczalnych i numerycznych zostały wyznaczone wartości sił krytycznych, podczas procesu osiowego ściskania. W odniesieniu do badań numerycznych, wyznaczenie precyzyjnych wartości sił krytycznych wiązało się z rozwiązaniem liniowego zagadnienia własnego. W ramach tego uzyskano wyniki na podstawie kryterium minimum energii potencjalnej rozpatrywanych struktur. W przypadku wyznaczenia wartości sił krytycznych podczas przeprowadzonych prób eksperymentalnych, nie można było jednoznacznie i dokładnie określić wartości sił krytycznych na podstawie otrzymanych charakterystyk obciążeń od odkształceń. Celem uzyskania przybliżonych wartości sił powodujących utratę stateczności, konieczne było zastosowanie znanych metod aproksymacyjnych. Proces aproksymacji w odniesieniu do zrealizowanych badań, polegał na opisanu efektywnych zakresów charakterystyk obciążeń od odkształceń w postaci określonych funkcji, zgodnie z wybranymi metodami aproksymacyjnymi [[20]]. W odniesieniu do próbki ceowej oraz omegowej przybliżona, doświadczalna wartość siły krytycznej została wyznaczona na podstawie sześcienniej metody Koiter'a. Wyznaczenie oczekiwanego parametru, polegało na aproksymowaniu efektywnego fragmentu zakresu charakterystyki siły od odkształceń (w postaci funkcji modułu z różnicy odkształceń na tensometrach) wielomianem trzeciego stopnia, tak by współczynnik korelacji R^2 był zbliżony w ponad 95% z postacią pierwotnej krzywej. Miejsce przecięcia funkcji aproksymacji z pionową osią wykresu, opisującą obciążenie ściskające, wyznaczyło przybliżoną wartość siły krytycznej. Proces numerycznego oraz doświadczalnego wyznaczania wartości sił, przy których następuje wyboczenie, wykazał bardzo wysoki poziom zbieżności uzyskanych wyników w przypadku każdej z próbek. Poniższe rysunki przedstawiają wartości sił krytycznych dla każdego z rozpatrywanych przypadków na podstawie danych z eksperymentu przeprowadzonego na maszynie wytrzymałościowej.



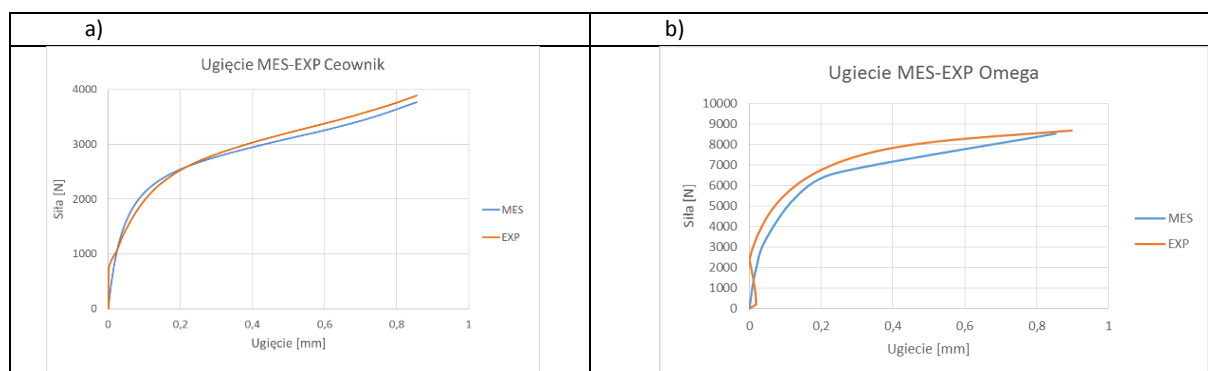
Rys. 4. Doświadczalne wyznaczenie przybliżonych wartości sił krytycznych:
a) profil ceowy, b) profil omegowy

Określanie stanu krytycznego pracy konstrukcji, polegało na wyznaczeniu poziomu wartości obciążenia pod wpływem, którego struktura doznaje przeskoku na nieliniowy charakter jej pracy. Zastosowanie metody aproksymacyjnej pozwoliło na określenie poziomu zbieżności wyników analiz doświadczalnych w zestawieniu z przeprowadzoną analizą numeryczną. Aproksymacji dokonano zaawansowaną metodą Koiter'a ze względu na to, iż stanowi ona jeden z najkorzystniejszych sposobów wyznaczania przybliżonych wartości obciążeń krytycznych dla próbek cechujących się wysoką sztywnością. Numerycznie wyznaczone wartości sił krytycznych w oparciu o zadanie jednostkowego obciążenia, pozwalającego na precyzyjne ich wyznaczenie przy uwzględnieniu zagadnienia własnego, przedstawiono na poniższych rysunkach.



Rys. 5. Numeryczne wyznaczenie sił krytycznych: a) profil ceowy, b) profil omegowy

Badanie MES było związane z uwzględnieniem nieliniowego zagadnienia numerycznego, celem uzyskania precyzyjnych wyników badań, w oparciu o metodę Newtona-Raphsona, stanowiącą iteracyjny algorytm wyznaczania przybliżonych wartości pierwiastków funkcji opisujących dany problem [[35]]. Na podstawie przeprowadzonych badań wykazano bardzo wysoki poziom zbieżności wyników dotyczących wartości sił krytycznych. W przypadku profilu o przekroju omegowym, błąd parametru siły krytycznej między obliczeniami MES i wynikiem uzyskanym na drodze doświadczalnej wynosił 1,11 %. Profil ceownika także wykazał wysoki poziom zbieżności wyników na poziomie 3,33 %. Kolejny etap badań wiązał się z wyznaczeniem stanu zgodności ugięcia każdej z próbek pod wpływem zadanych warunków brzegowych. Określenie poziomu zbieżności rezultatów badawczych, było możliwe dzięki uzyskaniu charakterystyk obciążenia od ugięć na drodze doświadczalnej i MES. Ugięcia były związane z oddziaływaniem wcześniej wyznaczonych sił krytycznych, na podstawie, których adekwatnie wyznaczono oczekiwane parametry. Poniżej zaprezentowano uzyskane rezultaty.



Rys. 6. Charakterystyki obciążenia od ugięcia: a) profil ceowy, b) profil omegowy

Na podstawie przeprowadzonych badań zostało zauważone, iż występuje duży poziom zgodności przebiegów otrzymanych drogą numeryczną oraz doświadczalną, charakterystyk obciążenia od ugięć występujących w strukturach. Badanie eksperymentalne odbiega w przebiegu charakterystyki od stanu idealnego uzyskanego numerycznie, z powodu imperfekcji geometrycznych próbek rzeczywistych oraz

stopnia odwzorowania warunków brzegowych. Rzeczywista struktura początkowo podczas procesu obciążania, przechodzi etap dopasowywania się do warunków brzegowych na maszynie wytrzymałościowej, z czego w głównej mierze wynikają rozbieżności między eksperymentem i obliczeniami numerycznymi.

4. Wnioski

W pracy przedstawiono problematykę nieliniowej stateczności pracy profili cienkościennych poddanych osiowemu ścisnaniu. Analiza numeryczna wykazała zbieżności wynikające w obrębie badanego stanu krytycznego struktur. Na podstawie przeprowadzonych badań sformułowano następujące wnioski:

- możliwe jest określanie poziomu sił krytycznych na drodze numerycznej w odniesieniu do kryterium liniowego zagadnienia własnego w oparciu o minimum energii potencjalnej układu,
- metody aproksymacyjne pozwalają na wyznaczanie przybliżonych wartości sił krytycznych z przeprowadzonych badań eksperymentalnych,
- wysoki poziom zbieżności wyników sił krytycznych uzyskanych drogą numeryczną i doświadczalną świadczy o stopniu dokładności przygotowania modeli numerycznych oraz zastosowanych metod określających krytyczny zakres pracy struktur,
- zbieżność rezultatów badawczych związanych z pracą profili w odniesieniu do charakterystyki obciążeń od ugięć wynika z precyzyjnego odwzorowania warunków brzegowych zgodnych z idealnym założeniem z MES.

Otrzymane rezultaty analizy MES ukazują bardzo szerokie możliwości nie tylko obserwacji, ale również wnikliwego badania stanów deformacji profili cienkościennych w pełnym zakresie obciążenia. Analizy numeryczne stanowią potężne narzędzie do badania stanu nośności oraz wyężenia zachodzącego w strukturach cienkościennych pod wpływem zdefiniowanych obciążeń.

5. Literatura

- [1] Z. P. Bazant and L. Cedolin, *Stability of Structures*. Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories. Oxford University Press, UK, 2010.
- [2] J. Becque and KJR. Rasmusen, *Experimental investigation of local-overall interaction buckling of stainless steel lipped channel columns*. J. Constructional Steel Research 65, pp. 1677–1684, 2009.
- [3] F. Bloom, D. Coffin, *Handbook of thin plate buckling and postbuckling*. CHAPMAN & HALL/CRC Boca Raton, London, New York, Washington, D.C. 2001.
- [4] H. Debski, *Experimental investigation post-buckling behaviour of composite column with top-hat cross section*. Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability 2, pp. 105-109, 2013.
- [5] H. Debski, T. Sadowski, *Modelling of microcracks initiation and evolution along interfaces of the WC/Co composite by the finite element method*. Computational Materials Science, vol. 83, pp. 403-411, 2014.
- [6] H. Debski, A. Teter, T. Kubiak, S. Samborski, *Local buckling, post-buckling and collapse of thin-walled channel section composite columns subjected to quasi-static compression*. Composite Structures 136, pp. 593-601, 2016.
- [7] H. Debski, A. Teter, T. Kubiak, *Numerical and experimental studies of compressed composite columns with complex open cross-sections*, Composite Structures 118, pp. 28-36, 2014.
- [8] J.F. Doyle, *Nonlinear analysis of thin-walled structures*. Springer, 2001.
- [9] K. Falkowicz, P. Mazurek, P. Rozylo P. Wymulski, W. Smagowski, *Experimental and numerical analysis of the compression of a thin-walled composite plate*. Advances in Science and Technology Research Journal 10(31), pp. 177-184, 2016.

- [10]K. Falkowicz, M. Ferdynus, H. Dębski, *Numerical analysis of compressed plates with a cut-out operating in the geometrically nonlinear range*. Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability 17(2), pp. 222-227, 2011.
- [11]Z. Kolakowski, A. Teter, *Static interactive buckling of functionally graded columns with closed cross-sections subjected to axial compression*. Composite Structures 123, pp. 257-262, 2015.
- [12]T. Kopecki, P. Mazurek, *Numerical representation of post-critical deformations in the processes of determining stress distributions in closed multi-segment thin-walled aircraft load-bearing structures*. Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability, 16(1), pp. 164-169, 2014.
- [13]T. Kopecki, P. Mazurek, *Problems of numerical bifurcation reproducing in postcritical deformation states of aircraft structures*. Journal of Theoretical and Applied Mechanics 51(4), pp. 969-977, 2013.
- [14]T. Kubiak, *Static and dynamic buckling of thin-walled plate structures*, Springer, Verlag, London, 2013.
- [15]P. Lonkwic, P. Różyło, *Theoretical and experimental analysis of loading impact from the progressive gear on the lift braking distance with the use of the free fall method*. Advances in Science and Technology Research Journal 10(30), pp. 103–109, 2013.
- [16]P. Lonkwic, P. Różyło, H. Dębski, *Numerical and experimental analysis of the progressive gear body with the use of finite-element method*. Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability 17 (4), pp. 544–550, 2015.
- [17]E. Magnucka-Blandzi and K. Magnucki, *Buckling, and optimal design of cold-formed thin-walled beams: Review of selected problems*. Thin-Walled Structures 49, pp. 554-61, 2011.
- [18]R.J. Mania, Z. Kolakowski, J. Bienias, P. Jakubczak, K. Majerski, *Comparative study of FML profiles buckling and postbuckling behaviour under axial loading*, Composite Structures 134, pp. 216-225, 2015.
- [19]M.R. Parlapalli, K.C. Soh, D.W. Shu, Ma G., *Experimental investigation of delamination buckling of stitched composite laminates*. Composites: Part A 38, pp. 2024–33, 2007.
- [20]M. Paszkiewicz, T. Kubiak, *Selected problems concerning determination of the buckling load of channel section beams and columns*. Thin-Walled Structures, vol. 93, p.112-121, 2015.
- [21]J. Roorda, „Some thoughts on the Southwell plot”, Proc. ASCE, Journ. of the Engineering Mechanics Division, Vol. 93, No. EM6, 1967.
- [22]P. Rozylo, *Optimization of I-section profile design by the finite element method*. Advances in Science and Technology Research Journal, 10(29), pp. 52-56, 2016.
- [23]P. Rozylo, K. Wrzesinska, *Numerical analysis of the behavior of compressed thin-walled elements with holes*. Advances in Science and Technology Research Journal 10(31), pp. 199-206, 2016.
- [24]A. Rudawska, H. Debski, *Experimental and numerical analysis of adhesively bonded aluminium alloy sheets joints*. Maintenance and Reliability 1 , pp. 4-10, 2011.
- [25]J. Singer, J. Arbocz, T. Weller, *Buckling experiments. Experimental methods in buckling of thin-walled structure*. Basic concepts, columns, beams, and plates. vol. 1. New York: John Wiley & Sons Inc., vol. 2, pp. 2002, 1998.
- [26]A. Teter, H. Debski, S. Samborski, *On buckling collapse and failure analysis of thin-walled composite lipped-channel columns subjected to uniaxial compression*, Thin-Walled Structures, Volume 85, pp. 324-331, 2014.
- [27]A. Teter, Z. Kolakowski, *Buckling of thin-walled composite structures with intermediate stiffeners*. Composite Structures 69, pp. 421-428, 2005.
- [28]A. Teter, Z. Kolakowski, *Load carrying capacity of functionally graded columns with open cross-sections under static compression*. Composite Structures 129, pp. 1-7, 2015.

- [29]Z. Tereszowski, *Doświadczalna metoda wyznaczania obciążeń krytycznych w płytach*. Archiwum Budowy Maszyn, Tom XVII zeszyt 3, Warszawa, 1970.
- [30]G.J. Turvey, Y. Zhang, *A computational and experimental analysis of the buckling, postbuckling and initial failure of pultruded GRP columns*. Computers & Structures 84, pp. 1527–1537, 2006..
- [31]A.M.A. Van der Heijden, *W.T. Koiter's Elastic Stability of Solids and Structures*. Cambridge University Press, 2009.
- [32]P.M.H. Wong, Y.C. Wang, *An experimental study of pultruded glass fibre reinforced plastics channel columns at elevated temperatures*. Composite Structures 81, pp. 84–95, 2007.
- [33]P. Wymulski, H. Debski, P. Rozylo, K. Falkowicz, *A study of stability and post-critical behaviour of thin walled composite profiles under compression*. Eksploatacja i Niezawodność – Maintenance and Reliability, 18 (4), pp. 632-637, 2016.
- [34]J. Zaraś, M. Królak, M. Kotełko, *Metody doświadczalne wyznaczania obciążeń krytycznych i analizy zachowania się elementów konstrukcji w stanie zakrytycznym*. X Krajowa Konferencja Wytrzymałości Materiałów i Badania Materiałów, Kudowa-Zdrój 20-22 IX, 2006.
- [35]O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, *Finite Element Method (5th Edition) Volume 2 – Solid Mechanics*”, Elsevier, 2000.